Analisi Matematica I (Lettere M-Pe) - Seconda prova intermedia - 6/12/2014

Dare la risposta alle seguenti domande (nello spazio a disposizione)
Domande 1-5: massimo 2 punti **Domande 6-11:** massimo 3 punti

---

1. Le derivate parziali di
$f(x,y) = \dfrac{e^{xy}}{x-2y}$ sono: $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{xy-2y^2-1}{(x-2y)^2}e^{xy}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^2-2xy+2}{(x-2y)^2}e^{xy}\right)$

---

2. La derivata sinistra in 0 di $f(x) = |\cos 2x + \log(1-|3x|)|$ è (3)
(notare che $\cos 2x + \log(1-|3x|) = 1$ per $x=0$ e quindi possiamo togliere il modulo)

---

3. L'intervallo maggiore in cui è non decrescente $f(x) = x^3 e^{2x}$ è $([-3/2, +\infty))$

---

4. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro 0 di $f(x) = \sin(\sin 2x)$ è $(2x - \frac{8}{3}x^3)$

---

5. Dire quanti punti di flesso ha $f(x) = x^4 + 3x - 2$ (0)
(notare che $f''(x) \geq 0$ per ogni x e quindi f è convessa)

---

6. L'equazione del piano tangente alla funzione
$f(x,y) = x^{2y}\log(x-3y)$ nel punto $(1,0)$ è $(z = x - 3y - 1)$

---

7. Dire se $f(x) = \sqrt{|x|}(|x|+1)$ ha in 0
un punto di non derivabilità e di che tipo. **(un punto di cuspide)**

---

8. $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{\arctan x - \arctan(6-x)}{\log x - \log(6-x)} =$ $\left(\dfrac{3}{10}\right)$

---

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin 2x) - 2x}{1-\sqrt{1+4x^3}} =$ $\left(\dfrac{4}{3}\right)$

---

10. Dare un esempio di una funzione
concava su $\mathbb{R}$ con $f''(2) = 0$ **($f(x) = -(x-2)^4$ o $f(x) = -(x-2)^6$, o $f(x) = 0$, ecc.)**

---

11. I punti di massimo e minimo locale di
$f(x) = \begin{cases} (2x-1)^3 & \text{se } x \notin \{-1,0,1\} \\ 0 & \text{se } x \in \{-1,0,1\} \end{cases}$ sono $\begin{cases} x = -1,\ 0 & \text{punti di massimo locale} \\ x = 1 & \text{punto di minimo locale} \end{cases}$

Domanda 1. (massimo 6 punti) Sia $f(x) = (3-|x|)e^{-|x|}$. Discutere al variare di α il numero di soluzioni di $f(x) = \alpha$. Discutere la convessità/concavità di f. (Aiutarsi disegnando il grafico)

Numero di soluzioni di $f(x) = \alpha$: 0 soluzioni per $\alpha < -e^{-4}$ e $\alpha > 3$; 1 soluzione per $\alpha = 3$; 2 soluzioni per $\alpha = -e^{-4}$ e $0 \leq \alpha < 3$; 4 soluzioni per $-e^{-4} < \alpha < 0$.

Convessità di f: su $[-5,0]$ e $[0,5]$. **Concavità di f:** su $(-\infty,-5]$ e $[5,+\infty)$.

(Nota: se si nota che f è pari, basta studiarla per $x \geq 0$)

Domanda 2. (massimo 2 punti) Spiegare perchè non si può applicare il teorema dell'Hôpital a:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x+1}{x}$ **(non è una forma indeterminata)**

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sin 3x}{2x+\sin 2x}$ **(non esiste il limite del rapporto delle derivate)**

1. Le derivate parziali di
$f(x,y) = \dfrac{e^{xy}}{x-3y}$ sono: $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{xy-3y^2-1}{(x-3y)^2}e^{xy}, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^2-3xy+3}{(x-3y)^2}e^{xy}\right)$

---

2. La derivata sinistra in 0 di $f(x) = |\cos 2x + \log(1+|3x|)|$ è (-3)

---

3. L'intervallo maggiore in cui è non decrescente $f(x) = x^3e^{-2x}$ è $((-\infty, 3/2])$

---

4. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro 0 di $f(x) = \sin(\sin 3x)$ è $(3x - 9x^3)$

---

5. Dire quanti punti di flesso ha $f(x) = 3x - 2 - x^4$ (0)

---

6. L'equazione del piano tangente alla funzione
$f(x,y) = x^{2y}\log(x-2y)$ nel punto $(1,0)$ è $(z = x - 2y - 1)$

---

7. Dire se $f(x) = \sqrt{|x|}(|x| + \sqrt{|x|})$ ha in 0
un punto di non derivabilità e di che tipo. **(un punto angoloso)**

---

8. $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\arctan x - \arctan(6-x)}{\log x - \log(6-x)} =$ $\left(\dfrac{2}{5}\right)$

---

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin 2x) - 2x}{1 - \sqrt{1+4x^3}} =$ $\left(9\right)$

---

10. Dare un esempio di una funzione
convessa su $\mathbb{R}$ con $f''(2) = 0$ **($f(x) = (x-2)^4$ o $f(x) = 0$, ecc.)**

---

11. I punti di massimo e minimo locale di
$f(x) = \begin{cases} (2x-1)^3 & \text{se } x \notin \{-1,0,1\} \\ x & \text{se } x \in \{-1,0,1\} \end{cases}$ sono $\begin{cases} x = -1,\ 0 & \text{punti di massimo locale} \\ & \text{nessun punto di minimo locale} \end{cases}$

Domanda 1. (massimo 6 punti) Sia $f(x) = (4 - |x|)e^{-|x|}$. Discutere al variare di α il numero di soluzioni di $f(x) = \alpha$. Discutere la convessità/concavità di f. (Aiutarsi disegnando il grafico)

(soluzione analoga alle altre file)

Domanda 2. (massimo 2 punti) Spiegare perchè non si può applicare il teorema dell'Hôpital a:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\log(2+x)}{x}$ **(non è una forma indeterminata)**

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x + \sin 3x}{3x + \cos 2x}$ **(non esiste il limite del rapporto delle derivate)**

1. Le derivate parziali di

$f(x,y) = \dfrac{e^{xy}}{3x-y}$ sono: $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{3xy - y^2 - 3}{(3x-y)^2} e^{xy}, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{3x^2 - xy + 1}{(3x-y)^2} e^{xy}\right)$

---

2. La derivata sinistra in 0 di $f(x) = |\cos 2x + \log(1 - |2x|)|$ è (2)

---

3. L'intervallo maggiore in cui è non decrescente $f(x) = x^3 e^{-3x}$ è $((-\infty, 1])$

---

4. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro 0 di $f(x) = \sin(\sin(-3x))$ è $(-3x + 9x^3)$

---

5. Dire quanti punti di flesso ha $f(x) = 4x - 7 - x^4$ (0)

---

6. L'equazione del piano tangente alla funzione
$f(x,y) = x^{3y} \log(x - 3y)$ nel punto $(1,0)$ è $(z = x - 3y - 1)$

---

7. Dire se $f(x) = \sqrt{|x|}(x^2 + \sqrt{|x|})$ ha in 0
un punto di non derivabilità e di che tipo. **(un punto angoloso)**

---

8. $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{\arctan x - \arctan x}{\log(x+1) - \log(5-x)} =$ $\left(-\dfrac{3}{5}\right)$

---

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(-3x)) + 3x}{1 - \sqrt{1 + 4x^3}} =$ $\left(-\dfrac{9}{2}\right)$

---

10. Dare un esempio di una funzione
convessa su $\mathbb{R}$ con $f''(-3) = 0$ $(f(x) = (x+3)^4$ **o** $f(x) = 0$**, ecc.)**

---

11. I punti di massimo e minimo locale di

$f(x) = \begin{cases} (2x-1)^3 & \text{se } x \notin \{-1,0,1\} \\ 1 & \text{se } x \in \{-1,0,1\} \end{cases}$ sono $\begin{cases} x = -1,\ 0 & \text{punti di massimo locale} \\ & \text{nessun punto di minimo locale} \end{cases}$

Domanda 1. (massimo 6 punti) Sia $f(x) = (|x| - 3)e^{-|x|}$. Discutere al variare di α il numero di soluzioni di $f(x) = \alpha$. Discutere la convessità/concavità di f. (Aiutarsi disegnando il grafico)

(soluzione analoga alle altre file a meno di un segno)

Domanda 2. (massimo 2 punti) Spiegare perchè non si può applicare il teorema dell'Hôpital a:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sin 3x}{4x - \cos 2x}$ **(non esiste il limite del rapporto delle derivate)**

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(3+x)}{x}$ **(non è una forma indeterminata)**

1. Le derivate parziali di
$f(x,y) = \dfrac{e^{xy}}{2x-y}$ sono: $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2xy - y^2 - 2}{(2x-y)^2} e^{xy}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2x^2 - xy + 1}{(2x-y)^2} e^{xy}\right)$

---

2. La derivata sinistra in 0 di $f(x) = |\cos 2x - \log(1 - |2x|)|$ è (-2)

---

3. L'intervallo maggiore in cui è non decrescente $f(x) = x^3 e^{3x}$ è $([-1, +\infty))$

---

4. Il polinomio di Taylor di ordine 3 e centro 0 di $f(x) = \sin(\sin(-2x))$ è $(-2x + \frac{8}{3}x^3)$

---

5. Dire quanti punti di flesso ha $f(x) = 17 + 4x + x^4$ (0)

---

6. L'equazione del piano tangente alla funzione
$f(x,y) = x^{4y} \log(x - 2y)$ nel punto $(1,0)$ è $(z = x - 2y - 1)$

---

7. Dire se $f(x) = \sqrt{|x|}(x^2 + x)$ ha in 0
un punto di non derivabilità e di che tipo. **(è derivabile in** 0**)**

---

8. $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{\arctan(6-x) - \arctan x}{\log(x-1) - \log(5-x)} =$ $\left(-\frac{1}{5}\right)$

---

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(-2x)) + 2x}{1 - \sqrt{1 + 2x^3}} =$ $\left(-\frac{8}{3}\right)$

---

10. Dare un esempio di una funzione
concava su $\mathbb{R}$ con $f''(-3) = 0$ $(f(x) = -(x+3)^4$ **o** $f(x) = 0$**, ecc.)**

---

11. I punti di massimo e minimo locale di
$f(x) = \begin{cases} (2x-1)^3 & \text{se } x \notin \{-1,0,1\} \\ -x & \text{se } x \in \{-1,0,1\} \end{cases}$ sono $\begin{cases} x = -1,\ 0 & \text{punti di massimo locale} \\ x = 1 & \text{punto di minimo locale} \end{cases}$

Domanda 1. (massimo 6 punti) Sia $f(x) = (|x| - 4)e^{-|x|}$. Discutere al variare di α il numero di soluzioni di $f(x) = \alpha$. Discutere la convessità/concavità di f. (Aiutarsi disegnando il grafico)

(soluzione analoga alle altre file a meno di un segno)

Domanda 2. (massimo 2 punti) Spiegare perchè non si può applicare il teorema dell'Hôpital a:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sin 4x}{2x - \cos 2x}$ **(non esiste il limite del rapporto delle derivate)**

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x}$ **(non è una forma indeterminata)**