34 LO STUDIO DI FUNZIONE

Possiamo riassumere parte di quello che abbiamo visto nelle ultime lezioni come un 'algoritmo' per studiare le proprietà (ed eventualmente tracciare un grafico approssimato) di una funzione f di cui si può calcolare la derivata.

1. Studio del dominio di f: suddivisione del dominio in intervalli. Semplificazione del dominio usando simmetrie (parità o disparità della funzione) o periodicità;

2. Andamento di f agli estremi degli intervalli di definizione: calcolo dei limiti e dei comportamenti asintotici;

3. Calcolo della derivata. Studio del dominio di f': suddivisione del dominio in intervalli;

4. Studio del segno della derivata. Individuazione degli intervalli di monotonia;

5. Classificazione di punti di discontinuità e di non-derivabilità; individuazione di estremi relativi ed assoluti.

6. (se possibile) Studio della derivata seconda. Individuazione degli intervalli di convessità/concavità. Individuazione di punti di flesso.

Esempio. (informazioni deducibili da limiti e dalla derivata prima)

Studiamo la funzione $f(x) = \dfrac{x \log |x|}{x+1}$.

1. Dominio di $f = \{x \neq 0, -1\}$, che scriviamo come unione di intervalli: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ e $(0, +\infty)$;

2. Calcolo dei limiti

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \log |x| = +\infty;$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1} f(x) &= -\lim_{x \to -1} \frac{\log(-x)}{1+x} \\ &= -\lim_{y \to -0} \frac{\log(1-y)}{y} = 1; \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \log |x|}{x+1} = \lim_{x \to 0} x \log |x| = 0;$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \log |x| = +\infty.$$

In particolare f è estendibile con continuità in -1 e 0.

Inoltre si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x \log |x|}{1+x} - \log |x| = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-\log |x|}{1+x} = 0,$$

e quindi f è asintotica a $\log|x|$ per $x \to \pm\infty$;

3. Calcolo della derivata:

$$f'(x) = \frac{1 + x + \log|x|}{(1+x)^2}.$$

Il dominio di f' è lo stesso di f;

4. Si ha $f' > 0$ se e solo se $\log|x| + x + 1 > 0$. Per $x < 0$ la funzione $g(x) = \log|x| + x + 1$ ha derivata $g'(x) = \frac{1}{x} + 1$ da cui si deduce che g è crescente in $(-\infty, -1)$ e decrescente in $(-1, 0)$, quindi ha massimo in $x = -1$ e $g(-1) = 0$, quindi $f' = g < 0$ per $x < 0$ e $x \neq -1$;

Per $x > 0$ la diseguaglianza $f' > 0$ equivale a $\log|x| > -x - 1$, che si risolve 'graficamente'. Usando il teorema degli zeri si ottiene che esiste un punto $\alpha \in (0, 1)$ in cui $f' = 0$ e tale che $f' < 0$ in $(0, \alpha)$ e $f' > 0$ in $(\alpha, +\infty)$.

Dunque: f è strettamente decrescente in $(-\infty, -1)$, in $(-1, 0)$ e in $(0, \alpha]$ (e la sua estensione per continuità è strettamente decrescente in $(-\infty, \alpha]$), e strettamente crescente in $[\alpha, +\infty)$;

5. Come abbiamo visto 0 e -1 sono punti di discontinuità eliminabile. La funzione non ha punti di non-derivabilità ed ha un solo punto di minimo assoluto α, che è anche il solo punto stazionario.

Estendendo f con continuità in -1 e 0, ponendo $f(0) = 0$ e $f(-1) = 1$, calcolando la derivata in questi due punti si ha:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\log|x|}{1 + x} = \lim_{x\to 0} \log|x| = -\infty,$$

e quindi $x = 0$ diventa un punto a tangente verticale, mentre

$$f'(-1) = \lim_{x\to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x\to -1} \frac{x\log|x| - x - 1}{(1+x)^2} = (\mathrm{H})$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\log|x|}{2(1+x)} = (\mathrm{H}) = \lim_{x\to -1} \frac{1}{2x} = -\frac{1}{2},$$

e quindi anche la derivata si estende in -1 ed è diversa da 0.

Osservazioni.

(a) A volte il dominio di f', o la sua suddivisione in intervalli in cui $f' > 0$ o $f' < 0$, non si calcolano esplicitamente, ma i teoremi che abbiamo a disposizione ci aiutano a descriverli qualitativamente. Nell'esempio sopra abbiamo usato il teorema degli zeri per determinare il numero di intervalli in cui $f' > 0$;

(b) Nell'esempio precedente lo studio del segno di f' per $x < 0$ non può essere eseguito facilmente, ma dobbiamo studiare la funzione g (in sostanza: per studiare f dobbiamo studiare prima f').

Esercizio. Studiare $f(x) = \dfrac{x^2 e^{-\frac{1}{x}}}{x + 2}$.

35 ESERCIZI VARI

1. Studiare la funzione
$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

2. Determinare il numero di minimi locali di
$$f(x) = \begin{cases} |2x-1|-1 & \text{se } x \notin \{-1,0,1\} \\ -x & \text{se } x \in \{-1,0,1\} \end{cases}$$

3. Determinare il più grande intervallo illimitato inferiormente su cui
$$f(x) = \frac{\log(x^2)}{x^3}$$
è concava.

4. Determinare il più piccolo valore di a tale che
$$f(x) = e^x(\log(x-3))^2$$
sia crescente su $[a, +\infty)$.

5. Dire se la funzione
$$f(x) = \frac{\log x}{2x+1}$$
è
   A) sempre decrescente
   B) decrescente in $(0, \alpha]$ e crescente in $[\alpha, +\infty)$ per un certo $\alpha > 0$
   C) sempre crescente
   D) crescente in $(0, \alpha]$ e decrescente in $[\alpha, +\infty)$ per un certo $\alpha > 0$
   E) limitata

6. Data
$$f(x) = e^{-x-1} - 2\pi x - 1,$$
determinare la derivata della funzione inversa f^{-1} nel punto $y = 2\pi$.

7. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log(2x))^{\log x} - (\log x)^{\log x}}{(\log(7x))^{\log x} - 4(\log x)^{\log x}}$$

8. Studiare la funzione
$$f(x) = \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - x.$$

9. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{(\log x)^2}{9} - \log x$$
e determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione
$$\frac{(\log x)^2}{9} - \log x - a = 0.$$

10. Studiare la funzione
$$f(x) = 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \log(1 + x^2) - \frac{\pi}{2}x$$
e determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione
$$2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \log(1 + x^2) - \frac{\pi}{2}x - a = 0.$$

11. Trovare il numero di punti di minimo relativo di
$$f(x) = \begin{cases} \big||x| - 1\big| & \text{se } x \notin \mathbb{Z} \\ x^2 - 2x + 2 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

12. Calcolare il limite
$$\lim_{n \to +\infty} (2^n + n!) \sin(4 \arctan(n!)).$$

36 POLINOMI DI TAYLOR

DERIVATE DI ORDINI SUCCESSIVI

Allo stesso modo della derivata seconda si definiscono per induzione le DERIVATE DI ORDINE k: la funzione *derivata* 0*-ima* di f si definisce ponendo $f^{(0)} = f$; se è definita in ogni punto $x \in I$ la derivata k-ima $f^{(k)} \in \mathbb{R}$ e se ne esiste la derivata in un punto x_0, si definisce $f^{(k+1)}(x_0) = D(f^{(k)})(x_0)$.

Definizione Sia I intervallo. Definiamo per ogni $k \in \mathbb{N}$ l'insieme $C^k(I)$ delle funzioni k volte derivabili su I tali che la derivata k-ima sia una funzione continua. Quindi:

$C^0(I)$ è l'insieme delle funzioni continue su I;

$C^1(I)$ è l'insieme delle funzioni derivabili su I la cui derivata è una funzione continua; ecc.

Si noti che valgono le inclusioni: $\ldots \subset C^2(I) \subset C^1(I) \subset C^0(I)$.

Definiamo inoltre lo spazio delle funzioni la cui derivata k-ima esiste per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$C^\infty(I) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(I).$$

NOTA: 1) le inclusioni sopra descritte sono strette. PER ESERCIZIO: fornire un esempio di funzione in $C^k(I)$ ma non in $C^{k+1}(I)$;

2) l'esistenza della derivata k-ima implica la continuità della derivata $k-1$-ima e quindi, per induzione, di tutte le precedenti;

3) i polinomi, gli esponenziali, i logaritmi, sin, cos,... sono funzioni C^∞. PER ESERCIZIO: calcolarne tutte le derivate;

4) dai teoremi di linearità delle derivate, si ha che per ogni k vale, per induzione, il teorema di linearità per funzioni di classe C^k.

5) se $f, g \in C^k(I)$, allora anche $fg \in C^k(I)$, e si ha

$$(fg)^{(k)} = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} f^{(n)} g^{(k-n)};$$

6) composizione di funzioni C^k è ancora C^k.

POLINOMI DI TAYLOR

OSSERVAZIONE: se f è continua nel punto a possiamo scrivere (ricordando la definizione di "o piccolo") che

$$f(x) = f(a) + o(1) \qquad \text{per } x \to a;$$

se f è derivabile in a, per la definizione di differenziabilità si ha

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \qquad \text{per } x \to a;$$

se f è derivabile due volte in a, abbiamo visto che si ha

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + o((x-a)^2) \qquad \text{per } x \to a;$$

Vogliamo generalizzare questa formula a funzioni n volte derivabili: il problema è trovare un polinomio P di grado n tale che si possa scrivere

$$f(x) = P(x) + o(x-a)^n \qquad \text{per } x \to a,$$

e se possibile esprimere P mediante le derivate di f in a fino all'ordine n.

Teorema. *Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ e f una funzione definita in un intorno del punto $a \in \mathbb{R}$ e derivabile n volte in a. Allora esiste un unico polinomio P di grado $\leq n$ tale che*

$$f(x) = P(x) + o(x-a)^n \qquad \text{per } x \to a.$$

P è caratterizzato da $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ per $k = 0, \ldots, n$, ed è quindi dato dalla formula

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Questo polinomio viene detto POLINOMIO DI TAYLOR *di f di* ORDINE *n e di* CENTRO *a.*

Si ha quindi la formula

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(x-a)^n \quad \text{per } x \to a,$$

detta FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI PEANO.
Questa formula è di ESTREMA UTILITÀ nel calcolo dei limiti.

DIMOSTRAZIONE Possiamo supporre, mediante una traslazione, che $a = 0$. Consideriamo il polinomio

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k,$$

e calcoliamo il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^n}$.

Questa è una forma indeterminata 0/0 Possiamo applicare l'Hôpital, ottenendo l'equivalenza con il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-P'(x)}{nx^{n-1}}.$$
Se $n=1$ questo limite è uguale a 0 e quindi $f-P=o(x^1)$ per $x\to 0$. Altrimenti si ha di nuovo una forma indeterminata $0/0$, e si può ri-applicare l'Hôpital, ottenendo l'equivalenza con il limite
$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{(2)}(x)-P^{(2)}(x)}{n(n-1)x^{n-2}}...$$
In generale, si applica l'Hôpital n volte, ottenendo alla fine l'equivalenza con il limite
$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-P^{(n)}(x)}{n!}=0.$$
Dunque $f-P=o(x)^n$.

Dalla applicazione dell'Hôpital vista sopra si ha che se $Q=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}c_kx^k$ è un polinomio di grado $\leq n$ e si ha $c_k\neq f^{(k)}(0)/k!$ per qualche $k\in\{0,\dots,n\}$, allora, posto $m=\min\{k:\ c_k\neq f^{(k)}(0)/k!$, si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-Q(x)}{x^n}=(H)=\ldots=(H)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(m)}(0)-c_m\,m!}{n(n-1)\ldots(n-m+1)x^{n-m}}\neq 0.$$

e quindi $f-Q\neq o(x)^n$. Dunque il polinomio P è univocamente determinato. $\square$

Criterio della derivata n-ima. Sia f n volte derivabile in a, e supponiamo che
$$f'(a)=f^{(2)}(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0.$$
Il Teorema sui polinomi di Taylor ci assicura che f si comporta allora come $f^{(n)}(a)(x-a)^n$ nel senso che
$$f(x)=f(a)+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o(x-a)^n.$$
Dunque se n è pari e $f^{(n)}(a)<0$ si ha un punto di massimo relativo per f in a; se n è pari e $f^{(n)}(a)>0$ si ha un punto di minimo relativo per f in a.

Se n è dispari e $f^{(n)}(a)<0$ f è strettamente decrescente in un intorno di a; se n è dispari e $f^{(n)}(a)>0$ f è strettamente crescente in un intorno di a.

L'operazione che associa ad una funzione f n-volte derivabile in un punto a il suo polinomio di Taylor di ordine n viene indicata con il simbolo T^n_a. Il teorema sopra si legge
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{T^n_a(x)}{(x-a)^n}.$$

Per lo più avremo a che fare con $a = 0$, nel qual caso "ci dimenticheremo" dell'indice 0.
Per esempio:

$$T_0^3(\exp) = e^0 + \frac{e^0}{1!}x + \frac{e^0}{2!}x^2 + \frac{e^0}{3!}x^3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6};$$

$$T_0^4(\sin) = \sin 0 + \frac{\cos 0}{1!}x + \frac{-\sin 0}{2!}x^2 + \frac{-\cos 0}{3!}x^3 + \frac{\sin 0}{4!}x^4 = x - \frac{x^3}{6}.$$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE (per il calcolo):
1) $T_a^n(f+g) = T_a^n f + T_a^n g$;
2) $T_a^n(fg) = T_a^n(T_a^n f \cdot T_a^n g)$;
3) $T_a^n(g \circ f) = T_a^n(T_{f(a)}^n g \circ T_a^n f)$.

(notare che se P è polinomio in $(x-a)$, allora l'operazione T_a^n corrisponde a "troncare" P al grado n). Infatti si verifica subito che le derivate k-ime dei secondi membri delle equaglianze sono quelle richieste, per $k = 1, \ldots, n$.

Polinomi di Taylor elementari

(da imparare A MEMORIA, e da verificare calcolando le derivate in 0)

$$T^n(\exp)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!};$$

$$T^{2n}(\cos)(x) = T^{2n+1}(\cos)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!};$$

$$T^{2n+1}(\sin)(x) = T^{2n+2}(\sin)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!};$$

$$T^n(\log(1+x)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k};$$

$$T^{2n+1}(\arctan)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)};$$

$$T^n((1-x)^{-1}) = \sum_{k=0}^{n} x^k;$$

$$T^1((1+x)^\alpha) = 1 + \alpha x;$$

$$T^3 \tan x = T^4 \tan x = x + \frac{1}{3}x^3.$$

ESEMPI: 1) Calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 2 e centro 0 della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) & \text{se } x \in \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[\\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Ricordando che si ha

$$\sin 3x = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)$$

e che $\qquad \log(1+y) = y + o(y), \quad$ si ha

$$\log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = \log(1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)) = -\frac{3}{2}x^2 + o(x^2),$$

ovvero

$$T^2 f(x) = -\frac{3}{2}x^2.$$

1bis) Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0+} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{\dfrac{1}{x \sin 2x}}.$$

Possiamo scrivere in forma esponenziale

$$\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{\dfrac{1}{x \sin 2x}} = \exp\Big(\frac{1}{x \sin 2x} \log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)\Big).$$

Il limite dell'esponente (ricordando il limite fondamentale di $\sin y/y$ e l'esempio 1)) vale

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{2x^2} \log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = \lim_{x \to 0+} \Big(-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\Big) \frac{1}{2x^2} = -\frac{3}{4}.$$

Dunque il nostro limite vale $e^{-3/4}$.

2) Calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 6 in 0 della funzione

$$f(x) = \log(1 + x^2) - x^2 \cos x.$$

Ricordiamo che

$$\log(1 + z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + o(z^3)$$

e che

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

per cui
$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)$$
e anche
$$x^2\cos x = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^6 + o(x^6).$$
Quindi si ha
$$f(x) = \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\Big)x^6 + o(x^6) = \frac{7}{24}x^6 + o(x^6),$$
e dunque
$$T^6 f(x) = \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\Big)x^6 = \frac{7}{24}x^6.$$

2bis) Calcoliamo il limite
$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2\cos x - \log(1+x^2)}{7x^2\tan(x^4)}.$$
Ricordando che
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x^4}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1,$$
il limite è uguale a
$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^2\cos x - \log(1+x^2)}{7x^6}.$$
Per l'esempio 2) si ha quindi
$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{7x^6}\big(-\frac{7}{24}x^6 + o(x^6)\big) = -\frac{1}{24}.$$
PER ESERCIZIO: risolvere i limiti negli esempi con la regola dell'Hôpital.

3) Calcolare il limite
$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[2]{x} - \sqrt[3]{\sin(x^{\frac{3}{2}})}}{(x-\sin x)\sqrt[2]{x}}.$$
Per prima cosa semplifichiamo il limite ricordandoci che $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, per cui
$$L = 6\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[2]{x} - \sqrt[3]{\sin(x^{\frac{3}{2}})}}{x^3\sqrt[2]{x}}.$$
Per avere solo potenze intere cambiamo variabile ponendo $y = \sqrt{x}$. Il limite diventa
$$\lim_{y\to 0+} \frac{y - \sqrt[3]{\sin(y^3)}}{y^6 y} = 6\lim_{y\to 0+} \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{\sin(y^3)}{y^3}}}{y^6} = 6\lim_{t\to 0+} \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{\sin t}{t}}}{t^2}$$

(abbiamo usato il cambiamento di variabili $t = y^3$). Si ha

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)}{t} = 1 - \frac{1}{6}t^2 + o(t^2)$$

e $\sqrt[3]{1+z} = (1+z)^{1/3} = 1 + \dfrac{1}{3}z + o(z)$, per cui

$$\sqrt[3]{\frac{\sin t}{t}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{6}t^2 + o(t^2)} = 1 - \frac{1}{18}t^2 + o(t^2).$$

Dunque

$$L = 6 \lim_{t \to 0+} \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{\sin t}{t}}}{t^2} = 6 \lim_{t \to 0+} \frac{\frac{1}{18}t^2 + o(t^2)}{t^2} = \frac{1}{3}.$$

37 ESERCIZI SUI POLINOMI DI TAYLOR

Calcolare i seguenti polinomi di Taylor con centro in 0, usando ove possibile i polinomi di Taylor noti e le operazioni su polinomi di Taylor.

1. Calcolare $T^3\Big(\dfrac{1}{\cos 2x}\Big)$.

Usiamo i polinomi di Taylor noti:

$$T^3\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3, \qquad T^3\cos z = 1 - \frac{1}{2}z^2,$$

per cui $T^3\cos 2x = 1 - 2x^2$,

$$T^3\Big(\frac{1}{\cos 2x}\Big) = T^3\Big(\frac{1}{1-2x^2}\Big)$$

$$= T^3(1 + (2x^2) + (2x^2)^2 + (2x^2)^3) = 1 + 2x^2.$$

2. Calcolare $T^4\Big(\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\Big)$.

La domanda si scrive anche: calcolare $T^4\cosh 2x$. Cogliamo l'occasione per calcolare $T^n\cosh y$. Dato che

$$T^n e^z = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}z^k, \qquad T^n e^{-z} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(-z)^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}z^k,$$

calcolando $T^n e^z + T^n e^{-z}$, i termini di grado dispari si elidono, per cui rimangono solo quelli di grado pari. Dividendo per 2 si ottiene

$$T^{2n}\cosh z = T^{2n+1}\cosh z = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k)!}z^{2k}$$

(ovvero i termini *pari* di $T^{2n}e^z$). Lo stesso tipo di calcolo ci mostra che

$$T^{2n+1}\sinh z = T^{2n+2}\sinh z = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)!}z^{2k+1}$$

(ovvero i termini *dispari* di $T^{2n+1}e^z$).

Tornando al nostro esercizio, si ha

$$T^4\cosh 2x = \sum_{k=0}^{2}\frac{1}{(2k)!}(2x)^{2k} = 1 + \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{24}(2x)^4 = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4.$$

3. Calcolare $T^3 \log\Big(\dfrac{1+2x}{1-3x}\Big)$.

Scriviamo
$$\log\Big(\frac{1+2x}{1-3x}\Big) = \log(1+2x) - \log(1-3x).$$
Usando lo sviluppo
$$T^3 \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3},$$
otteniamo ($y = 2x$)
$$T^3 \log(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3,$$
e ($y = -3x$)
$$T^3 \log(1-3x) = -3x - \frac{(-3x)^2}{2} + \frac{(-3x)^3}{3} = -3x - \frac{9}{2}x^2 - 9x^3.$$
Si ha quindi
$$T^3 \log\Big(\frac{1+2x}{1-3x}\Big) = T^3 \log(1+2x) - T^3 \log(1-3x)$$
$$= (2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3) - (-3x - \frac{9}{2}x^2 - 9x^3) = 5x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{35}{3}x^3.$$

4. Calcolare $T^4(x-5)\log(e^x - x)$.

Si ha
$$T^4(e^x - x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}.$$
Dato che in questo polinomio non compare x, basta considerare lo sviluppo fino all'ordine 2 di $\log(1+y)$:
$$T^2 \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2}.$$
Abbiamo
$$\begin{aligned} T^4 \log(e^x - x) &= T^4 \log(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}) \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}T^4\Big(\Big(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\Big)^2\Big) \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{8}x^4 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}. \end{aligned}$$

Moltiplicando per $(x-5)$ otteniamo

$$\begin{aligned}
&\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}-\frac{x^5}{12}-5(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}) \\
&= -\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{12}x^4-\frac{x^5}{12},
\end{aligned}$$

e quindi il polinomio cercato si ottiene eliminando il termine in x^5, ovvero

$$T^4(x-5)\log(e^x-x) = -\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{12}x^4.$$

5. Calcolare $T^3(2x+5)\sqrt{1+\sin x}$.

Calcoliamoci $T^3\sqrt{1+y}$. Se $f(y)=\sqrt{1+y}=(1+y)^{1/2}$ allora si ha

$$f'(y)=\frac{1}{2}(1+y)^{-1/2},\ f''(y)=-\frac{1}{4}(1+y)^{-3/2},\ f'''(y)=\frac{3}{8}(1+y)^{-5/2},$$

e

$$f(0)=1,\qquad f'(0)=\frac{1}{2},\qquad f''(0)=-\frac{1}{4},\qquad f'''(0)=\frac{3}{8}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}
T^3\sqrt{1+y} &= f(0)+f'(0)y+\frac{1}{2}f''(0)y^2+\frac{1}{6}f'''(0)y^3 \\
&= 1+\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}y^2+\frac{1}{16}y^3.
\end{aligned}$$

Ricordando che

$$T^3\sin x = x-\frac{1}{6}x^3,$$

si ha

$$T^3\sqrt{1+\sin x} = 1+\frac{1}{2}(x-\frac{1}{6}x^3)-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$$

(nei termini y^2 e y^3 possiamo tralasciare il termine in x^3 perche' viene sempre moltiplicato almeno per x e quindi da' termini almeno di grado 4)

$$= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{48}x^3.$$

Moltiplicando per $(2x+5)$ si ha quindi

$$\begin{aligned}
&2x+x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{24}x^4+5\Big(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{48}x^3\Big) \\
&= 5+\frac{9}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{17}{48}x^3+\frac{1}{24}x^4.
\end{aligned}$$

Eliminando il termine in x^4 si ottiene il polinomio voluto, ovvero

$$T^3(2x+5)\sqrt{1+\sin x} = 5+\frac{9}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{17}{48}x^3.$$

.

38 Appendice: il resto di Lagrange nella formula di Taylor

Sia f $n+1$ volte derivabile in un intervallo I e $a \in I$. Allora usando il Teorema di Lagrange si dimostra che se $x \in I$, esiste $\xi \in (a, x)$ tale che si ha

$$f(x) = T_a^n f(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

ovvero il resto della formula di Taylor si può esprimere nella forma (detta di Lagrange)

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

ESEMPI: 1) Consideriamo $f(x) = e^x$. Allora la formula di Taylor con il resto di Lagrange diventa (per $a = 0$)

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^{\xi} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad \text{da cui} \qquad \Big| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \Big| \le e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dato che $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, abbiamo

$$e^x = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

In particolare possiamo calcolare $e = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$

2) Consideriamo $f(x) = \log(1+x)$. Allora la formula di Taylor con il resto di Lagrange diventa (per $a = 0$)

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Quindi, se $0 \le x \le 1$

$$\Big| \log(1+x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \Big| \le \frac{|x|^{n+1}}{n+1},$$

e, dato che $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x|^n}{n} = 0$, si ha infine $\log(1+x) = \lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^n (-1)^{k+1} \dfrac{x^k}{k}$. In particolare possiamo calcolare $\log 2 = \lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^n (-1)^{k+1} \dfrac{1}{k} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots$

3) Consideriamo $f(x) = \arctan x$.

Con calcoli analoghi a quelli sopra, si vede che

$$\arctan x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

per $|x| \leq 1$. In particolare possiamo dare una formula per

$$\begin{aligned}\pi &= 4\arctan 1 = 4 \lim_n \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{2k+1} \\ &= 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \cdots.\end{aligned}$$

39 CALCOLO DIFFERENZIALE PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Per le funzioni definite su sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$ si sviluppano concetti analoghi alla derivabilità e differenziabilità per funzioni definire su sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, ma con alcune importanti differenze, in particolare che queste due nozioni non sono equivalenti. Tratteremo solo funzioni scalari (a valori in $\mathbb{R}$).

Per farsi un'idea di una funzione di più variabili è conveniente pensare al caso $n = 2$. In tal caso il grafico di f è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ che possiamo pensare, se f è continua, come una superficie, i cui punti (x, y, z) sono determinati da $z = f(x, y)$.

Esempi.

1) se $f(x, y) = a + bx + cy$ il grafico di f è un piano;

2) se $f(x, y) = x^2 + y^2$ il grafico di f è un paraboloide di rotazione attorno all'asse z;

3) se $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ il grafico di f è un cono; ecc.

Il concetto analogo alla retta tangente per $n = 1$ è il PIANO TANGENTE. L'esistenza di un piano (iperpiano in dimensione qualsiasi) tangente generalizza il concetto di differenziabilità.

Definizione. Sia $f : C \subset \mathbb{R}^n$ diremo che f è DIFFERENZIABILE in $X_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ se esiste una funzione lineare L

$$L(Y) = L(y_1, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k y_k$$

tale che

$$f(X) = f(X_0) + L(X - X_0) = o(|X - X_0|).$$

La funzione lineare L si dice il DIFFERENZIALE di f e si denota spesso con df.

La (iper)superficie di $\mathbb{R}^{n+1}$ di equazioni

$$x_{n+1} = f(X_0) + L(X - X_0) = f(X_0) + \sum_{k=1}^{n} a_k (x_k - x_k^0)$$

si dice (IPER)PIANO TANGENTE al grafico di f in $X = X_0$.

In particolare se $n = 2$ avremo un'equazione $z = z_0 + a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0)$ usando la solita notazione con le variabili x, y e z.

Se usiamo la notazione

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

per il PRODOTTO SCALARE tra X e Y in $\mathbb{R}^n$ l'equazione dell'iperpiano tangente si scrive anche (posto $A = (a_1, \dots, a_n)$)

$$x_{n+1} = f(X_0) + \langle A, X - X_0 \rangle.$$

Notare che se f è lineare allora è differenziabile e $df = f$, ovvero $df(Y) = f(Y)$. Questo si applica in particolare alle funzioni $X \mapsto x_k$, per cui $dx_k(Y) = y_k$.

Per $n = 1$ il calcolo della retta tangente è equivalente a quello della derivata di f. Vediamo come si generalizza il concetto di derivata a $\mathbb{R}^n$. Per prima cosa, per definire una derivata in un punto x_0, in dimensione uno abbiamo bisogno che la funzione sia definita in un intervallo che contiene il punto. La condizione analoga in dimensione pi alta è che il dominio di f contenga una palla centrata in x_0 (anche se molto piccola).

Definizione. Un insieme A di $\mathbb{R}^n$ si dice APERTO se per ogni $X \in A$ esiste un raggio ρ tale che la palla di centro X e raggio ρ sia contenuta in A, ovvero per ogni $X \in A$ esiste un raggio ρ tale che

$$Y \in A \quad \forall Y \in \mathbb{R}^n : |Y - X| < \rho.$$

Se A è aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ e $X_0 \in A$ allora possiamo considerare per ogni $V \in \mathbb{R}^n$ con $|v| = 1$ la retta per X_0 in direzione V. Questa retta è l'immagine della funzione $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ data da $\gamma(t) = X_0 + tV$. Possiamo considerare la restrizione di f a questa retta, ovvero la composizione $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$, che è ben definita su $I = (-\rho, \rho)$. Di questa composizione possiamo considerare la derivata in 0, questa derivata descrive la funzione a partire da X_0 in direzione V.

Definizione. Se A è aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $V \in \mathbb{R}^n$ con $|v| = 1$ e $X_0 \in A$. Si definisce la DERIVATA DIREZIONALE di f in direzione V in X_0 come

$$D_V f(X_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(X_0 + tV) - f(X_0)}{t}$$

quando questo limite esiste.

Nel caso speciale in cui $V = e_k$ (il vettore k-imo della base canonica) allora $D_{e_k} f$ si chiama DERIVATA PARZIALE k-IMA di f e si denota con uno tra i simboli

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}, \qquad \partial_k f, \qquad f_{,k}, \qquad D_k f,$$

e altri.

Il vettore di $\mathbb{R}^n$ la cui k-ima componente è la derivata parziale k-ima di f si chiama GRADIENTE di f e si denota con

$$\nabla u(X) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big)$$

(o a volte grad f, ecc.).

Calcolo delle derivate parziali. Si riduce al calcolo di derivate di una variabile, considerando come parametri le $n-1$ variabili rispetto a cui non si deriva.

Esempi. 1) $\dfrac{\partial(3x+2y)}{\partial x} = 3$, $\dfrac{\partial(3x+2y)}{\partial y} = 2$;

2) $\dfrac{\partial \sin(3x+2y)}{\partial x} = 3\cos(3x+2y)$, $\dfrac{\partial \sin(3x+2y)}{\partial y} = 2\cos(3x+2y)$;

3) $\dfrac{\partial e^{x^2 \tan y}}{\partial x} = e^{x^2 \tan y} 2x \tan y$, $\dfrac{\partial e^{x^2 \tan y}}{\partial y} = e^{x^2 \tan y} x^2(1+\tan^2 y)$.

Esercizi. Calcolare le derivate parziali di
1) $f(x,y) = e^{x^2+y^4} \log(3x-y)$;
2) $f(X) = |X|$ in $\mathbb{R}^n$, per $X \neq 0$;
3) $f(x,y,z) = y\sin(yz)$ in $\mathbb{R}^3$;
4) $f(x_1,\dots,x_6) = x_3 x_4^4 - 2x_1x_5x_6$ in $\mathbb{R}^6$.

Teorema. *Se f è differenziabile in X_0 allora esistono le derivate direzionali, in particolare esiste il gradiente di f, e, se $V = (v_1,\dots,v_n)$, si ha*

$$D_V f(X_0) = \langle \nabla f(X_0), V\rangle = \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(X_0).$$

Inoltre f è continua in X_0.

Dimostrazione. La continuità segue dalla definizione come per $n=1$. Applicando la defizione di differenziabilità abbiamo

$$D_V f(X_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(X_0+tV) - f(X_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{L(tV) + o(|t|)}{t} = L(V) = \langle A, V\rangle.$$

In particolare, se $V = e_k$, otteniamo $\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_k} = a_k$, e la formula voluta sostituendo a_k nell'espressione per $D_V f(X_0)$. □

Corollario. Si ha

$$f(X) = f(X_0) + \langle \nabla f(X_0), X - X_0\rangle + o(|X-X_0|).$$

Spesso questa relazione viene scritta come

$$df = \langle \nabla f, dX\rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k.$$

L'equazione dell'iperpiano tangente si scrive

$$x_{n+1} = f(X_0) + \langle \nabla f(X_0), X - X_0 \rangle.$$

In particolare se $n = 2$ il piano tangente ha equazione

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0).$$

Esempi (di non differenziabilità).

1) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

In $(0,0)$ si ha $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$, ma f non è neanche continua in $(0,0)$ come si verifica facendo il limite lungo le rette $y = mx$;

2) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

In $(0,0)$ si ha $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$, ma f non è differenziabile. Infatti, se $V = (v_1, v_2)$ con $|V| = 1$, secondo il teorema si dovrebbe avere $D_V f(0,0) = 0$, ma, applicando la definizione, si ha,

$$D_V f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^2}}{t} = v_1 v_2^2;$$

3) Consideriamo l'esempio di funzione discontinua in $(0,0)$ (e quiindi non differenziabile in $(0,0)$) già considerato

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x^2 \text{ e } x \neq 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In questo caso si ha $D_V f(0,0) = 0$ per ogni V.

Gli esempi sopra mostrano come l'esistenza delle derivate parziali, e anche di tutte quelle direzionali, non basta per concludere che f sia differenziabile. Il seguente teorema mostra che ciò è vero se si assume la continuità delle derivate parziali.

Teorema del differenziale totale. *Supponiamo che esistano e siano continue le derivate parziali di f in un intorno di X_0 (ovvero in una palla di centro X_0). Allora f è differenziabile in X_0.*

Non dimostriamo questo teorema.

Corollario. Le funzioni di classe C^1 sono differenziabili (differenziabili in ogni punto).

Osservazione. Per induzione di definiscono funzioni di classe C^2 come quelle in cui ogni derivata parziale è differenziabile, con derivate continue, C^3, ecc., e si possono definire polinomi di Taylor di ogni ordine. Non vogliamo sviluppare questo aspetto, ma notiamo solamente che se f è C^2 allora nell'uguaglianza

$$f(X) = f(X_0) + \langle \nabla f(X_0), X - X_0 \rangle + o(|X - X_0|)$$

il termine $o(|X - X_0|)$ si maggiora con $C|X - X_0|^2$ per qualche costante C che dipende da f e X_0.

Regole di calcolo. Mostrare che valgono le regole

$$\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g;$$

$$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g;$$

(se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

$$\nabla(f \circ g) = f'(g)\nabla g;$$

(se $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)

$$(f \circ (g, h))' = \frac{\partial f}{\partial x} g' + \frac{\partial f}{\partial y} h'.$$

Esercizi. Calcolare il piano tangente a

1) x^y in $(1, 1)$;
2) $e^{x^2+3y} \cos(2x - y)$ in $(0, 0)$;
3) $e^{x+y} \log(x - y + 1) + \sin(\pi \frac{x}{y})$ in $(1, 1)$;
4) $\sin(x \log y)$ in $(1, 1)$.

Calcolare approssimativamente

1) $(1.02)^{4.04}$ (posto $f(x, y) = x^y$ usare l'uguaglianza $f(1.02, 4.04) = f(1, 4) + \frac{\partial f(1,4)}{\partial x} \cdot \frac{2}{100} + \frac{\partial f(1,4)}{\partial y} \cdot \frac{4}{100} +$ resto);
2) $\sqrt{(4.02)^2 + (2.04)^2}$.