# 29 IL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Abbiamo visto che molte proprietà importanti delle funzioni (crescenza, decrescenza, iniettività, ecc.) si esprimono tramite proprietà del rapporto incrementale (positività, negatività, non annullarsi, ecc.), e quindi si riflettono su proprietà della derivata. Il seguente teorema ci permette di 'tornare indietro' e dedurre da proprietà della derivata alcune proprietà del rapporto incrementale.

**Teorema. (del valor medio, o di Lagrange)** *Sia* $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua in* $[x_1, x_2]$ *e derivabile in* $(x_1, x_2)$*. Allora esiste almeno un punto* $x \in (x_1, x_2)$ *tale che*

$$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Il significato geometrico del teorema è il seguente: dato che $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ è la pendenza della secante al grafico di $f$ per i punti del grafico relativi a $x_1, x_2$ (ovvero il 'valor medio' della pendenza del grafico di $f$ tra $x_1$ e $x_2$) e $f'(x)$ è la pendenza della tangente al grafico in $x$, il teorema afferma che esiste un punto $x$ in cui la pendenza della retta tangente è il valor medio della pendenza del grafico di $f$ tra $x_1$ e $x_2$, ovvero che esiste un punto $x$ in cui la tangente al grafico è parallela alla secante al grafico per i punti estremi.

**Osservazioni.** Vediamo che nessuna delle ipotesi del teorema può essere omessa
(1) La funzione $f$ deve essere continua in $[x_1, x_2]$, altrimenti ci può non essere alcuna relazione tra il rapporto incrementale agli estremi e la derivata all'interno di $[x_1, x_2]$: per esempio prendiamo $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{se } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

La funzione è discontinua in 0. Si ha $\dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{1 - 1}{1 - 0} = 0$, ma $f'(x) = 1$ per ogni $x \in (0, 1)$; quindi la tesi del teorema è falsa;
(2) La funzione $f$ deve essere derivabile in *ogni* punto di $(x_1, x_2)$. Prendiamo $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ e $f(x) = |x|$. La funzione $f$ è derivabile dappertutto tranne che in 0. Questo basta a far fallire il teorema: $\dfrac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \dfrac{1 - 1}{1 - (-1)} = 0$, ma $f'(x) = \pm 1$ dove $x$ è derivabile;
(3) Il dominio deve essere un intervallo. Se consideriamo la funzione $\frac{1}{x}$ definita per $x \neq 0$, si ha (prendendo $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$) $\dfrac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \dfrac{1 - (-1)}{1 - (-1)} = 1$, ma la derivata di $\dfrac{1}{x}$ è $-\dfrac{1}{x^2}$ (sempre negativa!) e quindi la tesi del teorema non è verificata.

Nel caso particolare in cui $f(x_1) = f(x_2)$ allora la tesi diventa che esiste un punto $x \in (x_1, x_2)$ tale che $f'(x) = 0$. Questo caso particolare del teorema di Lagrange viene a volte chiamato TEOREMA DI ROLLE. Vediamo come si dimostra questo teorema, sostanzialmente usando il Teorema di Weierstrass (il teorema di Lagrange si dimostra in modo simile, solo risulta un po' più complicata la notazione)

DIMOSTRAZIONE Se $f$ = costante la tesi è ovvia. Supponiamo allora $f$ non costante. Il Teorema di Weierstrass ci assicura l'esistenza di un punto di minimo $x_m$ e di un punto di massimo $x_M$. Dato che $f$ non è costante si ha $f(x_n) < f(x_M)$. Supponiamo che $x_m \notin \{x_1, x_2\}$, allora dal fatto che $f(x_m) \leq f(y)$ per ogni $y \in [x_1, x_2]$ deduciamo che

$$\frac{f(x_m) - f(y)}{x_m - y} \leq 0 \text{ se } y < x_m$$

da cui $f'_-(x_m) \leq 0$, e anche che

$$\frac{f(x_m) - f(y)}{x_m - y} \geq 0 \text{ se } y > x_m$$

da cui $f'_+(x_m) \geq 0$. Ma dato che $f$ è derivabile in $x_m$ si ha $f'(x) = f'_-(x_m) \leq 0$ e $f'(x_m) = f'_+(x_m) \geq 0$, da cui $f'(x_m) = 0$. Se invece $x_m \in \{x_1, x_2\}$ allora $f(x_m) = f(x_1) = f(x_2)$, e quindi $x_M \notin \{x_1, x_2\}$, si ripete il ragionamento (cambiando le diseguaglianze) e si conclude che $f'(x_M) = 0$.

**Esercizio.** Dimostrare il teorema di Lagrange applicando il teorema di Rolle alla funzione $g(x) = f(x) - \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

Come corollario al teorema di Lagrange abbiamo il seguente risultato, che è importante tenere a mente.

**Teorema. (della derivata nulla)** *Sia $f' = 0$ su un intervallo $I$; allora $f$ è costante su $I$*

DIMOSTRAZIONE Se $f$ non è costante allora $\exists x_1, x_2 \in I$ tali che $x_1 < x_2$ e $f(x_1) \neq f(x_2)$. Allora per il teorema del valor medio esiste $x \in (x_1, x_2)$ tale che $f'(x) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$, contro l'ipotesi. □

**ESEMPIO:** Sia $f(x) = \arctan x + \arctan(\frac{1}{x})$, definita per $x \neq 0$. Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^{-2}}(\frac{-1}{x^2}) = 0.$$

Non si può concludere però che $f$ è costante sul suo dominio poichè esso non è un intervallo. Infatti $f(1)$=$2\arctan 1 = \pi/2$, $\quad f(-1)$=$2\arctan(-1) = -\pi/2$.
Possiamo però applicare il teorema della derivata nulla sugli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ e concludere che $f(x) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{se } x < 0 \\ \pi/2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

## 30 MONOTONIA E SEGNO DELLA DERIVATA

Come conseguenza del teorema del valor medio otteniamo che se conosciamo il segno di $f'$ su un intervallo possiamo conoscere il segno del rapporto incrementale sullo stesso intervallo e quindi dedurne la monotonia di $f$.

**Teorema.** *Sia $f$ derivabile in $[a,b]$. Se $f' \geq 0$ (risp. $f' \leq 0$), allora $f$ è non decrescente (risp. non crescente). Se $f' > 0$ (risp. $f' < 0$) allora $f$ è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente).*

DIMOSTRAZIONE $(f' > 0)$ Siano $x_1, x_2 \in [a,b]$ con $x_1 < x_2$; per il Teorema del valor medio si ha che $\exists\ x \in (x_1, x_2)$ tale che $f(x_2) - f(x_1) = f'(x)(x_2 - x_1) > 0$.□

**Osservazione.** Se $f$ è non-decrescente allora il suo rapporto incrementale è non-negativo e quindi anche $f' \geq 0$, quindi possiamo dedurre che una funzione derivabile in un intervallo è non-descescente *se e solo se* $f' \geq 0$. Un enunciato analogo vale per le funzioni non-crescenti, ma se $f$ è strettamente crescente non possiamo dedurre che $f' > 0$ in ogni punto: si consideri la funzione $f(x) = x^3$, che è strettamente crescente; la sua derivata è $f'(x) = 3x^2$ che si annulla in 0. Naturalmente in questo caso possiamo dedurre dal teorema che $f$ è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$, e quindi lo è anche su tutto $\mathbb{R}$.

**Studio della monotonia.** Dal teorema precedente abbiamo il seguente procedimento:

1. Calcolare $f'$;
2. Studiare il segno di $f'$. Individuare nel dominio di $f'$ gli intervalli in cui $f' > 0$ e $f' < 0$;
3. Dedurre che in tali intervalli $f$ è strettamente crescente o decrescente.

**Esempio.** Sia $f(x) = x^2 e^{-x}$. Allora:

1. $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x} = x(2 - x)e^{-x}$;
2. Si ha $f' > 0$ per $0 < x < 2$ e $f' < 0$ per $x < 0$ o $x > 2$;
3. Deduciamo che $f$ è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(2, +\infty)$, strettamente crescente in $(0, 2)$.

NOTA: per verificare che non si sono fatti errori conviene controllare che le deduzioni sulla monotonia siano coerenti con i valori e i limiti della funzione agli estremi degli intervalli di monotonia. In questo caso, conviene verificare che

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) > f(0)$;
b. $f(0) < f(2)$;
c. $f(2) > \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Queste condizioni sono presto verificate, traducendosi in

a. $+\infty > 0$; b. $0 < 4e^{-2}$; c. $4e^{-2} > 0$.

**Esempio.** Sia $f(x) = x \log |x|$. Allora:

1. $f'(x) = \log |x| + 1$;

2. Si ha $f' > 0$ per $x < -1/e$ o $x > 1/e$ e $f' < 0$ per $-1/e < x < 0$ o $0 < x < 1/e$;

3. Deduciamo che $f$ è strettamente crescente in $(-\infty, -1/e)$ e in $(1/e, +\infty)$, strettamente decrescente in $(-1/e, 0)$ e $(0, 1/e)$.

NOTA: notare che entrambi gli esempi precedenti non sono deducibili semplicemente dalla conoscenza delle proprietà di monotonia delle funzioni elementari

**Esercizi.** Determinare gli intervalli in cui sono monotone crescenti/decrescenti, le seguenti funzioni:

**1.** $f(x) = \log |1 + \log x| + 2 \log 2$;

**2.** $f(x) = \arctan\Big(\dfrac{x}{x+1}\Big) + \log(2x^2 + 2x + 1)$;

**3.** $f(x) = e^{\sqrt{\log^2 x + \log x}}$;

**4.** $f(x) = |x - 1| e^{x^2}$;

**5.** $f(x) = \arctan\Big(\log\Big(\dfrac{1 + \sin x}{|\cos x|}\Big)\Big)$;

**6.** $f(x) = \arctan(\tan x)$;

# 31 ESTREMI RELATIVI. PUNTI STAZIONARI

**Definizione** Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Il punto $x_0$ si dice un PUNTO DI MASSIMO RELATIVO o un PUNTO DI MASSIMO LOCALE quando esiste un intorno $I$ di $x_0$ tale che $x_0$ è punto di massimo per la restrizione di $f$ a $I \cap A$; ovvero

$\forall\, x \in A \cap I$ si ha $f(x) \leq f(x_0)$.

Analogamente diciamo che $x_0$ è un PUNTO DI MINIMO RELATIVO o un PUNTO DI MINIMO LOCALE quando esiste un intorno $I$ di $x_0$ tale che $x_0$ è punto di minimo per la restrizione di $f$ a $I \cap A$; ovvero

$\forall\, x \in A \cap I$ si ha $f(x) \geq f(x_0)$.

Un punto si dice DI ESTREMO RELATIVO o DI ESTREMO LOCALE se è punto di massimo locale o di minimo locale.

NOTA: se $x_0$ è un punto di massimo per $f$ su $A$, allora è anche punto di massimo relativo; se vogliamo distinguere le due cose si parlerà di PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO (o globale).

**Esempi.** 1) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 2 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Allora $-1, 0, 1$ sono punti di massimo relativo; di questi 0 è punto di massimo assoluto;

2) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } |x| = 1 \\ 1/x^2 & \text{se } x \in ]-1,1[ \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

0 è punto di minimo assoluto; 1 e $-1$ sono punti di massimo relativo ma non assoluto.

3) $f(x) = \cos x$.

Tutti i punti della forma $2k\pi$ sono punti di massimo assoluto, tutti i punti della forma $(2k+1)\pi$ sono punti di minimo assoluto;

4) $f(x) = [x]$ (parte intera).

Tutti i punti $x \in \mathbb{R}$ sono punti di massimo relativo; tutti i punti $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ sono punti di minimo relativo;

5) $f(x) = \sqrt{|x|}$.

Il punto 0 è l'unico punto di minimo (assoluto e relativo); è anche un punto di cuspide;

6) $f(x) = \min\{|x|, |x-2|+1\}$.

Il punto 0 è punto di minimo assoluto; il punto 2 è punto di minimo relativo. Notare che la funzione non è derivabile in 0 e 2.

7) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \leq -1 \\ -x & \text{se } -1 < x < 1 \\ x-2 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

La funzione non ha punti di massimo e minimo assoluti. 1 è punto di minimo relativo; $-1$ è punto di massimo relativo.

**Esercizio.** Determinare i punti di estremo relativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 & \text{se } x \notin \mathbb{Z} \\ x^4 & \text{se } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Questa funzione è ottenuta 'modificando' in punti isolati la funzione continua $4x^2$, che ha un unico punto di minimo relativo (e assoluto) $x = 0$. Notiamo che si ha

$$\text{(a) } 4x^2 < x^4 \iff x < -2 \text{ o } x > 2;$$

$$\text{(b) } 4x^2 > x^4 \iff -2 < x < 2 \text{ e } x \neq 0;$$

$$\text{(c) } 4x^2 x^4 \iff x = -2, 2 \text{ o } 0.$$

Dunque (caso (c)) la funzione non viene modificata vicino ai punti $-2$, 0 e 2, e dunque 0 continua ad essere un minimo relativo, mentre $\pm 2$ non sono estremi relativi.

Nel caso (a) la funzione viene modificata nei punti $x_0 \in \mathbb{Z}$ con $x_0 < -2$ o $x_0 > 2$ e per tali $x_0$ si ha $f(x_0) > f(x)$ in un intorno di $x_0$, dato che $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 4x_0^2 < x_0^4 = f(x_0)$. Dunque questi $x_0$ sono punti di massimo relativo.

Nel caso (b) la funzione viene modificata nei punti $x_0 \in \mathbb{Z}$ con $-2 < x_0 < 2$, $x_0 \neq 0$ (ovvero $x_0 = \pm 1$) e per tali $x_0$ si ha $f(x_0) < f(x)$ in un intorno di $x_0$, dato che $\lim\limits_{x \to \pm 1} f(x) = 4 > 1 = f(\pm 1)$. Dunque questi $\pm 1$ sono punti di minimo relativo.

Riassumendo: $0, \pm 1$ sono i punti di minimo relativo per $f$; $\pm 3$, $\pm 4$, $\pm 5, \ldots$ sono i punti di massimo relativo.

**Osservazione:** nell'esercizio precedente abbiamo usato (per i punti $\pm 1$) il seguente ragionamento: "se si ha

$$f(x_0) < \lim_{x \to x_0} f(x),$$

allora $x_0$ è un punto di minimo relativo."

Analogamente (per i punti $\pm 3, \pm 4, \ldots$): "se si ha

$$f(x_0) > \lim_{x \to x_0} f(x),$$

allora $x_0$ è un punto di massimo relativo."

**Esercizi.** Trovare massimi e minimi relativi di

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} e^x(x^2+1) & \text{se } x \notin \{0,1\} \\ x & \text{se } x \in \{0,1\} \end{cases}$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} x^4 - x^5 & \text{se } x \notin \{-1, 0, 1\} \\ -1 & \text{se } x \in \{-1, 0, 1\}. \end{cases}$$

Nel caso di funzioni derivabili e punti di estremo relativo interni, si è visto che la derivata deve annullarsi, ovvero la tangente essere orizzontale (parallela all'asse delle $x$). Conviene dare una definizione per quest'ultima proprietà.

**Definizione** $x_0$ è PUNTO STAZIONARIO O PUNTO CRITICO di $f$ se $f'(x_0) = 0$.

ESEMPI: 1) $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x \Longrightarrow 0$ è l'unico punto stazionario (e di minimo assoluto)

2) $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2 \Longrightarrow 0$ è l'unico punto stazionario (ma non è punto di estremo relativo);

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$ 0 è punto stazionario. Verificarlo tramite la definizione di derivata.

Ricordiamo ora un ragionamento fatto per arrivare alla dimostrazione del Teorema del Valor Medio, che viene condensato nel teorema seguente. e che ci dà una "ricetta" per la ricerca di estremi (relativi) ma *solo in punti interni al dominio e in cui $f$ è derivabile.*

**Teorema. (di Fermat)** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$ un punto di estremo relativo per $f$ in cui esiste $f'(x_0)$; allora $x_0$ è punto stazionario di $f$.*

DIMOSTRAZIONE (nel caso in cui $x_0$ sia punto di min. rel.) $\exists \delta > 0$ tale che se $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, allora $f(x) - f(x_0) \geq 0$. Quindi

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0 & \text{se } x_0 - \delta < x < x_0 \\ \geq 0 & \text{se } x_0 + \delta > x > x_0. \end{cases}$$

Dunque passando al limite per $x \to x_0 \pm$ si ha $f'_-(x_0) \leq 0$, $f'_+(x_0) \geq 0$. Quindi deve essere $f'(x_0) = 0$. $\square$

NOTA: abbiamo dimostrato qualcosa di più:

"*Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in [a, b]$ un punto di estremo relativo per $f$ in cui esistono le derivate destra e/o sinistra.*
*(i) se $x_0$ è punto di minimo relativo allora $f'_-(x_0) \leq 0$, $f'_+(x_0) \geq 0$;*
*(ii) se $x_0$ è punto di massimo relativo allora $f'_-(x_0) \geq 0$, $f'_+(x_0) \leq 0$.*"

**Esercizio.** Verificare che queste condizioni sono soddisfatte dalle funzioni negli esempi sopra.

**Esercizio.** Trovare estremi relativi e punti stazionari di

$$f(x) = \arcsin\Big(\frac{x}{3}\Big) + \sqrt{|x-1|}.$$

In questo caso la funzione è definita in $[-3, 3]$, la sua derivata è

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{|x-1|}} \cdot \frac{x-1}{|x-1|}$$

definita per $x \in (-3, 3)$, $x \neq 1$. Per $x > 1$ la derivata è strettamente positiva (somma di funzioni positive). Per $x < 1$ si scrive

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}},$$

e si ha $f' > 0$ se e solo se

$$2\sqrt{1-x} > \sqrt{9-x^2},$$

ovvero $4(1-x) > 9-x^2$, cioè $x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1) > 0$. Dunque $f' > 0$ se $-3 < x < -1$ o $1 < x < 3$ e $f' < 0$ per $-1 < x < 1$.

Dunque $f$ ha due minimi relativi in $x = -3$ e $x = 1$, e due punti di massimo relativo in $x = -1$ e $x = 3$; inoltre $f$ ha un solo punto stazionario ($x = -1$) (gli altri punti sono un punto di cuspide ($x = 1$) e due punti con $f' = +\infty$).

# 32 PROPRIETÀ DEDUCIBILI DALLA DERIVATA SECONDA

**Definizione** Sia $f$ derivabile sull'intervallo $I$. Se esiste la derivata della funzione $x \mapsto f'(x)$ in $x$, allora $(f')'(x)$ si dice la DERIVATA SECONDA di $f$ in $x$, e si denota con $f''(x)$ o $f^{(2)}(x)$.

Vediamo per prima cosa un tipo di informazioni 'locali': noi sappiamo che se una funzione è derivabile in un punto $x_0$, lì il suo grafico è simile a quello di una retta. Se una funzione è derivabile due volte ci aspettiamo che il suo grafico sia simile a quello di una parabola.

**Teorema.** *Sia $f$ derivabile due volte in $x_0$, allora*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

(notare il fattore $\frac{1}{2}$, che viene dal derivare due volte $(x - x_0)^2$)

DIMOSTRAZIONE Dobbiamo vedere che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \Big(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2\Big)}{(x - x_0)^2} = 0$$

Per vedificarlo possiamo applicare due volte il teorema dell'Hôpital:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2}$$

$$= (H) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) + f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0)}{2(x - x_0)}$$

$$= \frac{1}{2} = \lim_{x \to x_0} \Big( \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} - f''(x_0) \Big) = 0$$

per definizione di $f''(x_0)$. $\square$

Se $x_0$ è un punto stazionario, ovvero $f'(x_0) = 0$, allora

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

e $f$ si approssima con una parabola con il vertice in $x_0$. Questo ci permette di concludere che $x_0$ è un massimo o minimo relativo.

**Teorema. (criterio della derivata seconda)** *Sia $f'$ una funzione continua e $x_0$ un punto stazionario di $f$. Se esiste $f''(x_0) > 0$ (risp. $< 0$), allora $x_0$ è un punto di minimo (risp. massimo) relativo per $f$.*

DIMOSTRAZIONE Si ha $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$, quindi esiste, per il Teorema della permanenza del segno $\delta > 0$ tale che

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} = \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0 \text{ per } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Quindi per $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ si ha $f'(x) < 0$, ovvero la funzione è decrescente in $(x_0 - \delta, x_0)$, mentre per $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ si ha $f'(x) > 0$, ovvero la funzione è crescente in $(x_0, x_0 + \delta)$. Questo mostra che $f(x_0) < f(x)$ per $0 < |x - x_0| < \delta$. □

NOTA: questo teorema suggerisce un metodo per la ricerca di punti di estremo relativo per funzioni due volte derivabili. Attenzione però : la condizione è solo sufficiente (si consideri la funzione $x^4$ nel punto 0).

**Definizione** Se $x_0$ è punto stazionario per $f$ e $f$ è monotona in un intorno di $x_0$, allora $x_0$ si dice un PUNTO DI FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE (per esempio: $f(x) = x^3$ e $x = 0$).

**Proposizione.** *Se $x_0$ è un punto di flesso a tangente orizzontale ed esiste $f''(x_0)$, allora $f''(x_0) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE $f$ monotona $\Longrightarrow f' \geq 0$ (oppure $\leq 0$) $\Longrightarrow x_0$ è un punto di minimo relativo (oppure massimo relativo) per $f' \Longrightarrow f''(x_0) = (f')'(x_0) = 0$. □

### Convessità e concavità

Vediamo ora come dallo studio di $f''$ si deducano anche delle informazioni 'globali', allo stesso modo in cui dallo studio della derivata prima si deducono informazioni sulla monotonia.

**Definizione** Una funzione $f$ definita su un intervallo si dice CONVESSA se il segmento congiungente due punti del grafico non passa mai 'sotto il grafico'. Una funzione $f$ si dice CONCAVA se il segmento congiungente due punti del grafico non passa mai 'sopra il grafico', o, equivalentemente, se $-f$ è convessa.

**Esempi.** (1) $f(x) = x^2$, $f(x) = |x|$ sono convesse (provarlo: basta osservare i grafici).

(2) $f(x) = x^3$, $f(x) = \sqrt{x}$ non sono convesse. Per la prima verificare che il segmento secante al grafico tra $x = -1$ e $x = 0$ sta sotto il grafico, per la seconda che il segmento secante al grafico tra $x = 0$ e $x = 1$ sta sotto il grafico;

(3) $f(x) = x^3$ non è ne' concava ne convessa. $f(x) = \sqrt{x}$ è concava.

(4) $f(x) = mx + q$ è sia concava che convessa.

Questa proprietà geometrica può essere descritta analiticamente: una funzione è convessa se per ogni $x, y$ e $t \in (0,1)$ si ha

$$f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x)$$

(*diseguaglianza di convessità*). Il significato di questa diseguaglianza, letto sul grafico, è il seguente: al variare di $t$ tra 0 e 1 il punto $z = ty + (1-t)x$ prende tutti i valori tra $x$ e $y$. Il valore $tf(y) + (1-t)f(y)$ non è altro che quello della retta secante il grafico nei punti relativi a $x$ e $y$ corrispondente a $z$. Quindi, appunto, la diseguaglianza dice che la retta secante sta sopra (o meglio non sta sotto) al grafico.

NOTA: se $f$ è derivabile, allora dire che $f$ è convessa è equivalente a dire che per ogni $x, x_0 \in (a,b)$ si ha

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x),$$

ovvero *il grafico della funzione $f$ sta sopra la tangente in un punto $x_0$*, e anche che $f'$ è non decrescente. Se $f$ è derivabile due volte si ha quindi il seguente criterio:

**Teorema. (criterio di convessità)** *Sia $I$ intervallo e $f$ due volte derivabile in $I$. Allora $f$ è convessa in $I$ se e solo se $f'' \geq 0$, e $f$ è concava in $I$ se e solo se $f'' \leq 0$.*

Come per i punti in cui cambia la monotonia, è utile avere una notazione per i punti in cui $f$ cambia da concava a convessa o viceversa.

**Definizione** Diciamo che $x_0$ è un PUNTO DI FLESSO per $f$ se $f$ è derivabile in $x_0$ e se esiste un $\delta > 0$ tale che $f$ è concava in $(x_0 - \delta, x_0)$ e convessa in $(x_0, x_0 + \delta)$, o viceversa.

NOTA: *se $x_0$ è un punto di flesso ed esiste $f''(x_0)$ allora $f''(x_0) = 0$.*

NOTA: se $f = mx + q$ allora secondo la nostra definizione ogni punto è un punto di flesso (analogamente se quest'uguaglianza vale in un intervallo aperto). Se si pensa l'analogia con punti in cui cambia la monotonia (dove abbiamo massimi o minimi locali), questo equivale all'osservazione che se $f$ è costante allora tutti i punti sono massimi *e* minimi locali.

**Esercizio.** Determinare gli intervalli su cui $f(x) = x^3 + x^2$ è concava/convessa.

In questo caso la funzione è derivabile due volte, quindi la domanda si traduce in determinare gli intervalli in cui $f'' \geq 0$ e $f'' \leq 0$ rispettivamente.

Calcoliamo:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x, \qquad f''(x) = 6x + 2 = 2(3x + 1).$$

Dunque $f$ è convessa su $[-1/3, +\infty)$ e concava su $(-\infty, -1/3]$. In particolare $x = -1/3$ è punto di flesso.

**Esercizio.** Determinare i più grandi intervalli illimitati superiormente su cui $f(x) = ||x| - 1|$ è concava/convessa.

Basta esaminare il grafico: su $[0, +\infty)$ la funzione coincide con $|x - 1|$ ed è quindi convessa, mentre non lo è su ogni intervallo più grande; su $[1, +\infty)$ la funzione coincide con $x - 1$ e quindi è (anche) concava.

**Esercizio.** Determinare (se esistono) i punti $a$ tali che $f(x) = \max\{x + 4, |x|\}$ è concava in $(-\infty, a]$ e convessa in $[a, +\infty)$.

Dal grafico si ha che $f$ è concava (coincidendo con $2 - |x + 2|$) su tutti gli intervalli $(-\infty, a]$ con $a \leq 0$, mentre è convessa (coincidendo con $|x|$) su tutti gli intervalli $[a, +\infty)$ con $a \geq -2$. Quindi gli $a$ cercati sono tutti i punti dell'intervallo $[-2, 0]$.

**Esercizio.** Trovare i punti di flesso delle funzioni dei due esercizi precedenti.

Negli intervalli dove sono derivabili le due funzioni sono affini (della forma $f(x) = mx + q$) e quindi ogni punto è di flesso. Quindi nel primo esercizio l'insieme dei punti di flesso è $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, nel secondo è $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

**Altri esercizi.**

Determinare intervalli di concavità, convessità ed eventuali punti di flesso delle funzioni:

1) $f(x) = (1 + x)^2 e^x$
2) $f(x) = (\log x)^8$
3) $f(x) = (x - 3) \log x^3$
4) $f(x) = (x \log x)^8$.

# 33 ALCUNI ESERCIZI SULLA CONVESSITÀ

**1.** Determinare il più piccolo valore $a$ tale che la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{x-5}$$

sia convessa su $(a, +\infty)$.

Le derivate prima e seconda di $f$ sono

$$f'(x) = \frac{e^x(x-6)}{(x-5)^2}, \qquad f''(x) = \frac{e^x(x^2-12x+37)}{(x-5)^3}$$

definite per $x \neq 5$. Dato che $x^2 - 12x + 37 > 0$ per ogni $x$, il segno di $f''$ è lo stesso di $(x-5)^3$, ovvero $f''$ è positiva per $x > 5$. La risposta è quindi $a = 5$.

**2.** Determinare gli intervalli su cui $f(x) = e^{-x^2}$ è concava/convessa.

Ancora, la funzione è derivabile due volte, quindi la domanda si traduce in determinare gli intervalli in cui $f'' \geq 0$ e $f'' \leq 0$ rispettivamente.

Calcoliamo:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}, \qquad f''(x) = e^{-x^2}(4x^2-2) = 2e^{-x^2}(2x^2-1).$$

Dunque

$$f''(x) \geq 0 \iff 2x^2 - 1 \geq 0,$$

e $f$ è convessa in $(-\infty, -1/\sqrt{2}]$ e $[1/\sqrt{2}, +\infty)$ e concava sull'intervallo $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$. In particolare $x = \pm 1/\sqrt{2}$ sono punto di flesso.

**3.** Determinare gli intervalli su cui $f(x) = 1 - |x-1|$ è convessa.

In questo caso la funzione non è derivabile due volte in 1, mentre la funzione è affine (e quindi sia concava che convessa) in $(-\infty, 1]$ e $[1, +\infty)$. Su tutto $\mathbb{R}$ la funzione è concava, quindi $f$ è convessa su ogni intervallo che non contiene 0.

**4.** Caratterizzare tutti gli intervalli $[a, b]$ su cui

$$f(x) = \frac{x^2+7x+50}{x^2+7x+49}$$

è concava.

Notiamo che $x^2 + 7x + 49 > 0$ per ogni $x$ e quindi la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre è derivabile due volte; quindi la funzione $f$ è concava su un intervallo $[a, b]$ se e solo $f'' \leq 0$ su $[a, b]$.

Dopo aver semplificato

$$f(x) = \frac{x^2+7x+50}{x^2+7x+49} = 1 + \frac{1}{x^2+7x+49},$$

calcoliamo:

$$f'(x) = -\frac{2x+7}{(x^2+7x+49)^2},$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2(2x+7)^2 - 2(x^2+7x+49)}{(x^2+7x+49)^3} \\ &= 2 \cdot \frac{4x^2+28x+49-x^2-7x-49}{(x^2+7x+49)^3} \\ &= \frac{6}{(x^2+7x+49)^3} \cdot (x^2+7x). \end{aligned}$$

Quindi

$$f''(x) \leq 0 \iff -7 \leq x \leq 0,$$

dunque $f$ è concava in tutti gli intervalli $[a, b]$ contenuti in $[-7, 0]$.

**5.** Determinare gli intervalli su cui $f(x) = |x-1| + \sqrt{|x| - x}$ è convessa/concava.

Per $x \geq 0$ si ha

$$f(x) = |x-1|,$$

che è convessa. Inoltre $f$ è concava in ogni intervallo di $(0, +\infty)$ che non contiene 1.

Per $x < 0$ si ha $f(x) = -1 + x + \sqrt{-2x}$, la cui derivata seconda è

$$f''(x) = -\frac{1}{2\sqrt{-2x^3}},$$

che è negativa. Dunque $f$ è concava in $(-\infty, 0]$. Si vede facilmente dal grafico che $f$ non è concava in nessun intervallo aperto che contiene 0.

**Un criterio per determinare la convessità per funzioni non derivabili in un punto**. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua in $(a, b)$ e derivabile in $a < c < b$. Se $f$ è convessa in $(a, c)$ e in $(c, b)$ ed esistono le derivate destra e sinistra $f'_{\pm}(c)$, allora $f$ è convessa in $(a, b)$ se e solo se

$$f'_{-}(c) \leq f'_{+}(c).$$

**Altri esercizi. 1.** Determinare il più grande intervallo illimitato superiormente su cui

$$f(x) = |x-2| e^{-\frac{1}{3}x}$$

è convessa.

**2.** Determinare l'insieme dei punti di flesso di

$$f(x) = 3x^5 + 10x^4 + 10x^3.$$