24 IL RAPPORTO INCREMENTALE - DERIVATE

Definizione Sia f una funzione reale di variabile reale. Allora, dati $x, y \in dom f$ con $x \neq y$, si definisce il RAPPORTO INCREMENTALE di f tra x e y come

$$P_f(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

OSSERVAZIONI: il rapporto incrementale ci permette di descrivere 'quantitativamente' il comportamento di una funzione. Per esempio:

i) f è non decrescente $\Longleftrightarrow P_f$ è non negativa;

ii) f è strettamente crescente $\Longleftrightarrow P_f$ è strettamente positiva;

iii) se $f(x) = mx + q$ è affine allora P_f è il coefficiente angolare m.

Più in generale, $P_f(x,y)$ rappresenta la tangente dell'angolo che la retta (la *secante* al grafico) passante per i punti $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ forma con l'asse coordinato orizzontale. Invece di studiare le proprietà di tutte le secanti è più comodo studiare le proprietà delle *rette tangenti*. Analiticamente, questo si traduce in un'operazione di limite che porta alla seguente definizione.

Definizione Sia I intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto di I. Se esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0} P_f(x, x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}},$$

esso viene chiamato la DERIVATA di f nel punto x_0 e si indica con $f'(x_0)$. Se $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ allora f si dice DERIVABILE in x_0.

ALTRE NOTAZIONI per $f'(x_0)$: $Df(x_0),\ \dfrac{d}{dx}f(x_0),\ \dfrac{dy}{dx},\ y'$

ESEMPI

1) $f = c$ costante $Dc = 0$ in ogni punto. Infatti $P_f(x,y) = 0$ per ogni coppia di punti.

2) $f(x) = x$. Allora $P_f(x,y) = 1$ per ogni coppia di punti, per cui $f'(x) = 1$ per ogni x.

3) $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$). Allora

$P_f(x,y) = x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2}x + y^{n-1}$, per cui $f'(x) = nx^{n-1}$.

4) $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Allora ($x \neq 0$) $f'(x_0) = \displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{(1/x) - (1/x_0)}{x - x_0}$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x_0 - x)/(x_0 x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} -\frac{1}{x_0 x} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

5) calcoliamo la derivata di e^x. Si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} e^{x_0}\Big(\frac{e^{(x-x_0)} - 1}{x - x_0}\Big) = e^{x_0}.$$

Dunque $De^x = e^x$.

6) dal limite fondamentale $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ si deduce

$\sin x = x + o(x) \qquad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$,

da cui si ottiene subito la derivata di sin e cos. Per esempio si ha

$$D\sin x = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(x+t) - \sin x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin x \cos t + \sin t \cos x - \sin x}{t}$$

$$= \cos x \cdot \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} + \sin x \cdot \lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{t} = \cos x + \sin x \cdot \lim_{t\to 0}\Big(\frac{t}{2} + o(t)\Big) = \cos x.$$

Analogamente $D(\cos x) = -\sin x$.

7) Se $f(x) = \operatorname{sgn} x$ (il segno di x), allora $f'(x) = 0$ se $x \neq 0$, mentre per $x = 0$ abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0},$$

e quindi $f'(0) = +\infty$.

Differenziabilità

Dalla derivabilità si ottengono alcune informazioni sul comportamento della funzione f vicino al punto x_0. Prima di tutto f è continua in x_0.

Teorema. *f derivabile in $x_0 \Longrightarrow f$ continua in x_0.*

DIMOSTRAZIONE Se $f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x_0) + \lambda(x - x_0) = f(x_0)$. □

Ma il grafico di una funzione derivabile in x_0 ha una proprietà più forte: può essere approssimato con una retta (la sua retta tangente). Per specificare meglio come è definita questa retta introduciamo il concetto seguente.

Definizione Sia I intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Diciamo che f è DIFFERENZIABILE in x_0 quando esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che si abbia $f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$.

SIGNIFICATO GEOMETRICO: la retta $y = f(x_0) + \lambda(x - x_0)$ approssima la curva $y = f(x)$ "ad un ordine superiore a $x - x_0$" (questa retta è TANGENTE alla curva).

Teorema. *f differenziabile in $x_0 \Longleftrightarrow f$ derivabile in x_0. In tal caso $\lambda = f'(x_0)$ e la* RETTA TANGENTE *è data da*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

DIMOSTRAZIONE $f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0 \Longleftrightarrow$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda. \qquad \square$$

25 CALCOLO DI DERIVATE

Dal teorema di linearità per i limiti si ha subito:

Teorema. (LINEARITÀ) *Sia I intervallo e x_0 punto interno a I. Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ sono derivabili in x_0 e $c \in \mathbb{R}$, allora sono derivabili in x_0 anche $f+g$ e cf e si ha*

$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \quad (cf)'(x_0) = c(f'(x_0))$.

Teorema. (DERIVATA DI COMPOSIZIONE) *Siano I e J intervalli; $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ x_0 un punto interno a I tale che $f(x_0)$ è interno a J. Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è derivabile in x_0, e si ha*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

DIMOSTRAZIONE Sia $y_0 = f(x_0)$. Dalla differenziabilità di g in y_0 si ha $g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0)$, per $y \to y_0$. In particolare per $y = f(x)$ e $x \to x_0$ si ha $g(f(x)) = g(y_0) + g'(y_0)(f(x) - y_0) + o(f(x) - y_0)$, ovvero

$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0) + g'(y_0)(f(x) - y_0) + o(f(x) - y_0)$. Dalla differenziabilità di f abbiamo

$f(x) - y_0 = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ e dunque

$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0)$

$+g'(y_0)(f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(f'(x_0)(x - x_0))$

$= (g \circ f)(x_0) + g'(y_0)f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$.

Questo mostra che $(g \circ f)$ è differenziabile in x_0 e la sua derivata è $g'(y_0)f'(x_0)$. □

ESEMPI: 1) $n \in \mathbb{N}$ $D(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$.

La funzione $x \mapsto x^{-n}$ si può considerare come composizione delle funzioni $f(x) = x^n$ e $g(y) = 1/y$; e sappiamo che $f'(x) = nx^{n-1}$, $g'(y) = -1/y^2$. Dunque

$D(x^{-n}) = g'(f(x))\, f'(x) = -\dfrac{1}{(x^n)^2}\,(nx^{n-1}) = -nx^{-n-1}$;

2) $D\Big(\dfrac{1}{f}\Big) = -\dfrac{1}{f^2}\, f'$ (considerare $\dfrac{1}{f}$ come composizione di f e $1/y$).

Teorema. (DERIVATA DEL PRODOTTO) *Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivabili in $x_0 \in I$; allora anche fg è derivabile in x_0, e si ha*

$$(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0).$$

DIMOSTRAZIONE $(fg)(x) - (fg)(x_0) = f(x)(g(x) - g(x_0)) + g(x_0)(f(x) - f(x_0))$, per cui

$P_{fg}(x, x_0) = f(x)P_g(x, x_0) + g(x_0)P_f(x, x_0)$.

Passando al limite per $x \to x_0$ (ricordando che $f(x) \to f(x_0)$) si ha la tesi. □

Esercizio. Provare la formula $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.
(Applicare la derivazione del prodotto di f e $1/g$ ricordando che $D(g^{-1}) = -g^{-2}g'$).

Derivate delle funzioni elementari

È utile *imparare a memoria* le derivate delle funzioni più usate. In particolare:

$$D(e^x) = e^x, \qquad D1 = 0, \qquad D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1},$$

$$D\cos x = -\sin x \qquad D\sin x = \cos x$$

e quindi anche $\qquad D\tan x = 1 + \tan^2 x$

$$D\cosh x = \sinh x \qquad D\sinh x = \cosh x,$$

dove $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ sono coseno e seno iperbolico.

Teorema. (DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE INVERSA) *Sia I intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ continua e invertibile in I. Se esiste $f'(x_0)$, allora esiste anche la derivata di f^{-1} nel punto $y_0 = f(x_0)$, e si ha*

$$D\big(f^{-1}\big)(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \textit{ovvero} \qquad \big(f^{-1}\big)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

NOTA: 1) l'ipotesi di invertibilità su f equivale alla stretta monotonia;

2) la formula per la derivata dell'inversa vale anche se $f'(x_0) = 0$ o $f'(y_0) = \pm\infty$, applicando le dovute convenzioni;

3) se $f'(x_0) \neq 0$, allora f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$.

Dimostrazione Si ha

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

per il teorema sul limite di composizione. □

Esempio. Ora possiamo calcolare la derivata di $\log x$, usando il teorema della derivata della funzione inversa, con $f(x) = e^x$, $f^{-1}(x) = \log x$. Si ha allora

$$D(\log x) = D(f^{-1})(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

Derivate delle funzioni inverse elementari

$$D(\log x) = \frac{1}{x}, \qquad D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad D(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(si intende che x appartiene al dominio della singola funzione).

ESERCIZIO: ottenere le formule di derivazione delle funzioni trigonometriche inverse usando il teorema della derivazione dell'inversa.

Esercizi. Usando le derivate delle funzioni elementari e le regole di calcolo calcoliamo:

1) $D(\sin 2x) = (\cos 2x)\, 2$;

2) $D(\log\cos x) = \dfrac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$;

3) la derivata di $(\log x)^{\sqrt{x}}$ $(x > 1)$.

Possiamo scrivere $(\log x)^{\sqrt{x}} = \exp\Big(x^{1/2}\log(\log x)\Big)$. Si ha

$D\Big(x^{1/2}\log(\log x)\Big) = \log(\log x) D x^{1/2} + x^{1/2} D\log(\log x)$.

Dato che $Dx^{1/2} = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ e $D\log(\log x) = \dfrac{1}{\log x}\,\dfrac{1}{x}$, si ha dunque

$$D\Big(x^{1/2}\log(\log x)\Big) = \log(\log x)\frac{1}{2\sqrt{x}} + x^{1/2}\frac{1}{x\log x} = \frac{\log x\, \log(\log x) + 2}{2\sqrt{x}\, \log x},$$

e infine

$$D(\log x)^{\sqrt{x}} = \exp\Big(x^{1/2}\log(\log x)\Big)\frac{\log x\, \log(\log x) + 2}{2\sqrt{x}\, \log x} = (\log x)^{(\sqrt{x}-1)}\,\frac{\log x\, \log(\log x) + 2}{2\sqrt{x}}.$$

Esercizio: verificare la formula generale per la derivata di f^g:

$$D\big(f^g\big) = f^g\big(\frac{f'g}{f} + g'\log f\big).$$

(scrivere $f^g = \exp(g\log f)$...)

Esercizi. 1) $D(\log f) = \dfrac{f'}{f}$;

2) $D(e^f) = e^f\, f'$;

3) $D(x^\alpha) = D(e^{(\alpha\log x)}) = x^\alpha D(\alpha\log x) = \alpha x^{\alpha-1}$ $(\alpha \neq 1)$.

26 PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

La funzione derivata

Definizione Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$I' = \{x \in I : \ f \text{ è derivabile in } x\} \neq \emptyset,$$

allora si chiama DERIVATA DI f la funzione $f' : I' \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ che associa ad ogni punto $x \in I'$ la derivata di f in x.

ESEMPI: 1) $f(x) = x$, $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} f' = \mathbb{R}$; $f' = 1$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$;

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Allora $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} f' = \mathbb{R}$ e

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Notare che f' non è continua in 0.

Derivate destre e sinistre

Definizione Sia I intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto di I. Se esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0 -} P_f(x, x_0) = \lim_{x \to x_0 -} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}},$$

esso viene chiamato la DERIVATA SINISTRA di f nel punto x_0 e si indica con $f'_-(x_0)$.

Se esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0 +} P_f(x, x_0) = \lim_{x \to x_0 +} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}},$$

esso viene chiamato la DERIVATA DESTRA di f nel punto x_0 e si indica con $f'_+(x_0)$.

1) $f(x) = |x|$. Sia $x_0 > 0$; allora
$P_f(x, x_0) = \dfrac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = 1$ per tutti gli $x > 0$, per cui $f'(x_0) = 1$. Se invece $x_0 < 0$,
$P_f(x, x_0) = \dfrac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \dfrac{-x - (-x_0)}{x - x_0} = -1$ per tutti gli $x < 0$, per cui $f'(x_0) = -1$.

Se $x_0 = 0$ si ha $P_f(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ -1 & \text{se } x < 0, \end{cases}$
per cui $f'_-(x_0) = -1$ e $f'_+(x_0) = 1$; in particolare non esiste $f'(x_0)$. Riassumendo

$$D|x| = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x}.$$

Dunque per $f(x) = |x|$, $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R} \setminus \{0\} \neq \operatorname{dom} f = \mathbb{R}$; $f' = \dfrac{x}{|x|}$;

2) $f(x) = sgn(x)\sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt{|x|} & \text{se } x < 0 \end{cases}$. Allora

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{-\sqrt{|x|} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty.$$

Quindi $f'(0) = +\infty$, e f non è derivabile in 0.
Dunque per $f(x) = sgn(x)\,\sqrt{|x|}$ $\operatorname{dom} f' \neq \operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ in quanto $0 \notin \operatorname{dom} f'$.

3) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$. Allora

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{1-1}{x-0} = 0;\ f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{0-1}{x-0} = +\infty.$$

Tipi di punti di non derivabilità

Se la funzione f *non* è derivabile in un punto x_0 si possono presentare vari casi. Se f è continua in x_0 ed esistono le derivate destra e sinistra di f in x_0, allora si usa la seguente nomenclatura:

1) $\exists\ f'_-(x_0), f'_+(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$ e almeno uno dei due è finito. Allora x_0 si dice un PUNTO ANGOLOSO.
Esempi: $(x_0 = 0)$ $f(x) = |x|$, $f(x) = \sqrt{x + |x|}$;

2) $\exists\ f'(x_0) = \pm\infty$; allora x_0 si dice un PUNTO DI FLESSO A TANGENTE VERTICALE (o semplicemente PUNTO A TANGENTE VERTICALE).
Esempi: $(x_0 = 0)$ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (l'inversa di x^3), $f(x) = sgn(x)\,\sqrt{|x|}$;

3) $f'_-(x_0), f'_+(x_0) \in \{+\infty, -\infty\}$ $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$; allora x_0 si dice un PUNTO DI CUSPIDE.
Esempi: $(x_0 = 0)$ $f(x) = \sqrt{|x|}$

NOTA: possono anche non esistere $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$; per esempio si prenda

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases} \text{ e } x_0 = 0.$$

Esercizi. Descrivere i punti di non derivabilità delle seguenti funzioni.

1. $f(x) = |\log|x||$.

Dato che $\log|x|$ è derivabile ovunque (nel suo dominio), e $|y|$ non è derivabile in $y = 0$, la composizione PUÒ non essere derivabile solo per $\log|x| = 0$, ovvero per $|x| = 1$, cioè $x = \pm 1$. Si ha

$$f'_-(\pm 1) = -1, \qquad f'_+(\pm 1) = 1,$$

quindi questi due sono punti angolosi.

2. $f(x) = \sqrt{|x^3 + x^2|}$.

Dato che $x^3 + x^2$ è derivabile ovunque (nel suo dominio), e $\sqrt{|y|}$ non è derivabile in $y = 0$, la composizione può non essere derivabile solo per $x^3 + x^2 = 0$, ovvero per $x = 0$ e $x = -1$.

Si ha

$$f'_\pm(-1) = \lim_{x\to -1\pm} \frac{\sqrt{x^2|x+1|}}{x+1} = \lim_{y\to 0\pm} \frac{|y-1|\sqrt{|y|}}{y} = \pm\infty,$$

e quindi -1 è un punto di cuspide.

Si ha

$$f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{\sqrt{x^2|x+1|}}{x-0} = \lim_{x\to 0\pm} \frac{|x|\sqrt{|x+1|}}{x} = \pm 1,$$

quindi 0 è punto angoloso. Notare che $\sqrt{|y|}$ ha un punto di cuspide, quindi: *non si può dedurre il tipo di non-derivabilità di una composizione sapendo solo i tipi di non-derivabilità delle funzioni separatamente.*

3. $f(x) = \sqrt{|\sin x|}$.

Si ha

$$f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{\sqrt{|\sin x|}}{x} = \pm\infty,$$

e analogamente ogni punto della forma $k\pi$, quindi tutti questi sono punti di cuspide.

4. $f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$.

Si ha
$$f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$
e analogamente ogni punto della forma $2k\pi$, quindi tutti questi sono punti angolosi.

5. $f(x) = |\sin x||x + x^2|$ nel'intervallo $[-2, 2]$.

La funzione $|\sin x|$ ha un punto angoloso in 0 e la funzione $|x + x^2|$ ha due punti angolosi in 0 e -1, quindi i possibili punti di non derivabilità sono 0 e -1.

Si ha
$$f'_\pm(-1) = \lim_{x\to -1\pm} \frac{|\sin x||x + x^2|}{x+1} = \sin 1 \lim_{x\to -1\pm} \frac{|x+1|}{x+1} = \pm \sin 1,$$
quindi $x = -1$ è punto angoloso.

Si ha
$$f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{|\sin x||x + x^2|}{x} = \lim_{x\to 0\pm} \frac{|\sin x||x|}{x} = \lim_{x\to 0\pm} \frac{|\sin x|}{|x|} x = 0,$$
e quindi f è derivabile in 0. Dunque $x = 0$ non è un punto di non derivabilità anche se lo era per entrambe le funzioni $|\sin x|$ e $|x + x^2|$.

6. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x & \text{se } x > 0. \end{cases}$

L'unico punto di non derivabilità possibile è $x_0 = 0$, dove
$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1 = 1$$
e
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$
per cui si ha un punto angoloso.

27 ALCUNI ESERCIZI SULLE DERIVATE

Risolvere i seguenti esercizi:

1. Calcolare derivata destra e sinistra in $x = 0$ di

$$f(x) = 4\sqrt{\sin x^2} + 7\sqrt{\cos x^2};$$

2. Calcolare derivata destra e sinistra in $x = \pi$ di

$$f(x) = \Big| 3 \sin |\pi - x| - 4 \cos |\pi + x| \Big|.$$

(notare che per $x \to \pi+$ si ha

$$f(x) = 4 \cos(\pi + x) - 3 \sin(x - \pi),$$

mentre per $x \to \pi-$ si ha

$$f(x) = 4 \cos(\pi + x) - 3 \sin(\pi - x));$$

3. Calcolare la retta tangente in $x = 1$ al grafico di

$$f(x) = \frac{1 + \arctan(x^2 - x)}{|1 - 2x|};$$

4. Calcolare la retta tangente in $x = 6$ al grafico di

$$f(x) = e^x \cos(\pi x) \log(x - 5).$$

(notare che $D(f \cdot g \cdot h) = Df \cdot g \cdot h + f \cdot Dg \cdot h + f \cdot g \cdot Dh$);

5. Calcolare la retta tangente al grafico di $f(x) = (1 + \log x)^{3x}$ in $x = 1$

6. Calcolare la retta tangente al grafico di $f(x) = (3x)^{\log x}$ in $x = 1$

7. Calcolare la retta tangente al grafico di $f(x) = (\cos x + \sin x)^{\cos x}$ in $x = 2\pi$

8. Calcolare la derivata sinistra in $x = 0$ della funzione
$f(x) = \Big| \sqrt{(|x| + x)} \log(|x| + \sqrt{\cos x^2}) \Big|$

9. Trovare i punti di non-derivabilità di

$$f(x) = \sqrt{||x| - 1|}$$

(notare che

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x-1} & \text{per } x < -1 \\ \sqrt{x+1} & \text{per } -1 < x < 0 \\ \sqrt{-x+1} & \text{per } 0 < x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

e che nei rispettivi intervalli queste funzion i sono derivabili. Dedurre che 1 e -1 sono punti di cuspide, 0 è punto angoloso).

10. Trovare i punti di non-derivabilità di $f(x) = |x^2 - x|\sqrt{|x^2 - 2x|}$

28 IL TEOREMA DI De L'Hôpital

Una seconda applicazione delle derivate (oltre che dare informazioni sul grafico di una funzione) è il calcolo dei limiti in caso di forme indeterminate. Come considerazione preliminare notiamo che nel caso di limiti $0/0$ in x_0 e che sia $f'(x_0)$ che $g'(x_0)$ siano finiti si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)}{g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)}$$

per cui il limite è banalmente $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Il seguente teorema generalizza questa osservazione.

Teorema. *Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ funzioni definite e derivabili in un intorno destro I di $x_0 \in [-\infty, +\infty[$. Supponiamo che sia verificata una delle due condizioni:*

i) *(forma $0/0$)* $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0+} g(x) = 0$;

ii) *(forma ∞/∞)* $\lim_{x\to x_0+} f(x) \in \{+\infty, -\infty\}$, $\lim_{x\to x_0+} g(x) \in \{+\infty, -\infty\}$.

Se esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Le stesse conclusioni sono valide per il limite $x \to x_0-$ (se f, g sono definite in un intorno sinistro di $x_0 \in (-\infty, +\infty]$).

Non dimostreremo questo teorema, la cui dimostrazione non è difficile, ma non è neanche particolarmente istruttiva.

In seguito useremo la notazione (H) per intendere "proviamo ad applicare il teorema dell'Hôpital calcolandoci il limite del rapporto delle derivate. Se tale rapporto ha un limite, allora il conto è concluso". Se invece abbiamo di nuovo una forma indeterminata, possiamo di nuovo provare ad applicare il teorema, ecc.

ESEMPI: tramite questo teorema possiamo ritrovare la maggior parte dei limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = (H) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = (H) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(1 + x\right)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = (H) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x + 1} = 1;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\Big(\frac{+\infty}{+\infty}\Big)=(H)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=+\infty;$$

$$\Big(\alpha>0\Big)\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}=\Big(\frac{+\infty}{+\infty}\Big)=(H)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0;$$

$$\lim_{x\to 0}x\log|x|=\lim_{x\to 0}\frac{\log|x|}{1/x}=\Big(\frac{-\infty}{+\infty}\Big)=(H)=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0}(-x)=0.$$

Il Teorema di De L'Hôpital può semplificare il calcolo di limiti complicati:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log(\sin x^2+\cos x)}{x^2} &= \Big(\frac{0}{0}\Big)=(H)\\ &= \lim_{x\to 0}\Big(\frac{2x\cos x^2-\sin x}{\sin x^2+\cos x}\Big)\frac{1}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x^2-\sin x}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\cos x^2-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}\\ &= 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Attenzione però a non "eccedere" nell'uso: il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^5 x}{x^5}$$

è banalmente uguale a 1 (applicando il limite fondamentale e la continuità di y^5); si può anche risolvere usando solo il teorema di De L'Hôpital , ma si deve derivare 5 volte:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^5 x}{x^5}=(H)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\sin^4 x\cos x}{5x^4}=(H)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^3 x\cos^2 x-\sin^5 x}{4x^3}=(H)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{12\sin^2 x\cos^3 x-8\sin^4 x\cos x-5\sin^4 x\cos x}{12x^2}=\dots$$

Attenzione anche al fatto che se non esiste il limite del rapporto delle derivate allora non è detto che non esista il limite del rapporto delle funzioni: evidentemente, prendendo $f(x)=x+\sin x$ e $g(x)=x$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{\sin x}{x}=1,$$

ma invece
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}1+\cos x$$
non esiste.

Esercizi.

1. Calcolare
$$\lim_{x\to1^+}\frac{\log(x^2-x+1)}{\log(3x^2-3x+1)}$$
in due modi: usando il teorema dell'Hôpital e i limiti fondamentali

2. Calcolare
$$\lim_{x\to4^+}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x-4}}{\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+8}}$$
in due modi: usando il teorema dell'Hôpital e razionalizzando

3. Calcolare (dopo avere riscritto la funzione in base e)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x^3}-\frac{4}{x^4}\right)^{\frac{4}{\log x}}$$
in due modi: usando il teorema dell'Hôpital e mediante confronto di infiniti

4. Calcolare (dopo avere riscritto la funzione in base e)
$$\lim_{x\to3^+}\Big(\log(x^2-3x+1)\Big)^{\frac{2}{\log(x-3)}}$$

5. Verificare che **non** si può applicare il teorema dell'Hôpital al calcolo di
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x+3\sin x)}{\log(2x+4\cos x)}.$$

6. Calcolare, se possibile, usando il teorema dell'Hôpital il limite
$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$$