21 ALCUNI ESERCIZI

Confronti tra funzioni

1. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\, 9^x + x^6\, 8^x}{x^2\, 3^x + x^4\, 4^x}\,.$$

All'infinito sono le funzioni esponenziali che hanno il "carattere dominante" e inoltre $8^x << 9^x$ e $3^x << 4^x$. Questo suggerisce di ignorare i termini con 8^x e 3^x. Vediamo comunque tutti i passaggi:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\, 9^x + x^6\, 8^x}{x^2\, 3^x + x^4\, 4^x} \quad = \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\, 9^x \left(1 + x^2 \left(\frac{8}{9}\right)^x\right)}{x^4\, 4^x \left(1 + \frac{1}{x^2}\left(\frac{3}{4}\right)^x\right)}$$

Si ha
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\left(\frac{3}{4}\right)^x = 0$$
(entrambi i fattori tendono a 0), ed anche
$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{8}{9}\right)^x = 0$$
(perché $x^2 << \left(\frac{9}{8}\right)^x$), quindi il limite diventa
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\, 9^x}{x^4\, 4^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{9}{4}\right)^x = +\infty$$

2. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4\, 9^x + x^6\, 8^x}{x^2\, 3^x + x^4\, 4^x}\,.$$

A $-\infty$ sono ancora le funzioni esponenziali che hanno il "carattere dominante", ma adesso $9^x << 8^x$ e $4^x << 3^x$. Questo suggerisce di trascurare i termini con 9^x e 4^x. Vediamo comunque tutti i passaggi:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4\, 9^x + x^6\, 8^x}{x^2\, 3^x + x^4\, 4^x} \quad = \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^6\, 8^x \left(1 + \frac{1}{x^2} \left(\frac{9}{8}\right)^x\right)}{x^2\, 3^x \left(1 + x^2\left(\frac{4}{3}\right)^x\right)}$$

Si ha
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}\left(\frac{9}{8}\right)^x = 0$$

(entrambi i fattori tendono a 0), ed anche

$$\lim_{x\to-\infty} x^2\Big(\frac{4}{3}\Big)^x = 0$$

(perché $x^2 << \big(\frac{4}{3}\big)^x$ a $-\infty$), quindi il limite diventa

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^6\, 8^x}{x^2\, 3^x} = \lim_{x\to-\infty} x^4\Big(\frac{8}{3}\Big)^x = 0$$

perché $x^4 << \Big(\frac{3}{8}\Big)^x$ a $-\infty$. Un altro modo per calcolare questo ultimo limite (utile, perché siamo abituati a pensare agli andamenti a $+\infty$) è cambiare variabile $y = -x$, per cui il limite diventa

$$\lim_{y\to+\infty} y^4\Big(\frac{8}{3}\Big)^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^4}{\big(\frac{8}{3}\big)^y} = 0,$$

perché $y^4 << \big(\frac{8}{3}\big)^y$ per $y \to +\infty$.

3. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\log\big(x^4\, 9^x + x^6\, 8^x\big)}{\log\big(x^2\, 3^x + x^4\, 4^x\big)}.$$

Possiamo procedere come sopra mettendo in evidenza gli andamenti dominanti a $-\infty$, oppure direttamente cambiare variabile $y = -x$ e considerare gli andamenti a $+\infty$. Seguiamo questa seconda strada. Il limite diventa

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to+\infty} \frac{\log\big(\frac{y^4}{9^y} + \frac{y^6}{8^y}\big)}{\log\big(\frac{y^2}{3^y} + \frac{y^4}{4^y}\big)} &= \lim_{y\to+\infty} \frac{\log\Big(\frac{y^6}{8^y}\big(1 + \frac{1}{y^2}\,\big(\frac{8}{9}\big)^y\big)\Big)}{\log\Big(\frac{y^2}{3^y}\big(1 + y^2\,\big(\frac{3}{4}\big)^y\big)\Big)} \\
&= \lim_{y\to+\infty} \frac{\log y^6 - \log 8^y + \log\big(1 + \frac{1}{y^2}\,\big(\frac{8}{9}\big)^y\big)}{\log y^2 - \log 3^y + \log\big(1 + y^2\,\big(\frac{3}{4}\big)^y\big)} \\
&= \lim_{y\to+\infty} \frac{6\log y - y\log 8 + \log\big(1 + \frac{1}{y^2}\,\big(\frac{8}{9}\big)^y\big)}{2\log y - y\log 3 + \log\big(1 + y^2\,\big(\frac{3}{4}\big)^y\big)}
\end{aligned}$$

Dato che $\lim_{x\to+\infty} y^2\,\big(\frac{3}{4}\big)^y = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{y^2}\,\big(\frac{8}{9}\big)^y = 0$, abbiamo

$$\log\Big(1 + \frac{1}{y^2}\,\big(\frac{8}{9}\big)^y\Big) << 1 << 6\log y << y\log 8$$

e

$$\log\Big(1 + y^2\,\big(\frac{3}{4}\big)^y\Big) << 1 << 2\log y << y\log 3.$$

Dunque, gli andamenti dominanti sono $y\log 8$ e $y\log 3$, e il limite è $\dfrac{\log 8}{\log 3}$.

Asintoti

1. Calcolare l'asintoto a $-\infty$ di

$$f(x) = \log(e^x + 2^x) + \frac{3x^4 + 3x^3 + x^2 \log|x| + 2}{x^3 + x^2}.$$

Consideriamo separatamente le due funzioni

$$f_1(x) = \log(e^x + 2^x), \qquad f_2(x) = \frac{3x^4 + 3x^3 + x^2 \log|x| + 2}{x^3 + x^2}.$$

Per f_1 notiamo che l'andamento dominante a $-\infty$ è quello di 2^x per cui

$$f_1(x) = \log\Big(2^x\Big(1 + (\frac{e}{2})^x\Big)\Big) = \log 2^x + o(1) = 2\log x + o(1).$$

Dunque f_1 è asintotica a $2\log x$ per $x \to -\infty$.

Per f_2, possiamo 'eliminare' tutti i termini al numeratore che sono $o(x^3)$, ovvero scrivere

$$f_2(x) = \frac{3x^4 + 3x^3}{x^3 + x^2} + \frac{x^2 \log|x| + 2}{x^3 + x^2} = 3x + o(1).$$

Dunque f_2 è asintotica a $3x$ per $x \to -\infty$.

Sommando le due funzioni si ottiene l'asintoto obliquo $y = (3 + \log 2)x$.

2. Calcolare l'asintoto a $-\infty$ di

$$f(x) = \log(e^3 2^x + 3^e 4^x).$$

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \log(e^3 2^x + 3^e 4^x) &= \log\Big(e^3 2^x\Big(1 + \frac{3^e}{e^3}2^x\Big)\Big) \\ &= \log e^3 + \log 2^x + \log\Big(1 + \frac{3^e}{e^3}2^x\Big) \\ &= 3\log e + x\log 2 + o(1) \\ &= 3 + x\log 2 + o(1), \end{aligned}$$

e quindi l'asintoto è $y = 3\log e + x\log 2$.

3. Calcolare l'asintoto a $-\infty$ di

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}.$$

Dato che non ci riduciamo direttamente ad una funzione affine eliminando dei pezzi trascurabili come abbiamo fatto nei due esercizi precedenti, cerchiamo un asintoto della forma $y = mx + q$, calcolandoci prima

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 - x^3}}{x} = - \lim_{y\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{y^2 + y^3}}{y} \\ &= - \lim_{y\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{y^2 + y^3}{y^3}} = -1 \end{aligned}$$

(abbiamo fatto il cambio di variabile $y = -x$ per avere un limite a $+\infty$).

La formula per il calcolo di q dà

$$q = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt[3]{x^2 - x^3} + x) = \lim_{y\to+\infty} (\sqrt[3]{y^2 + y^3} - y),$$

che è una forma indeterminata $+\infty - \infty$. Possiamo razionalizzarla. In questo caso vorremmo ottenere una differenza di cubi. Per capire come ottenere una differenza di cubi dobbiamo dividere $a^3 - b^3$ per $a - b$, ottenendo

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2,$$

cioé il "prodotto notevole"

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

Questo ci dice che dobbiamo moltiplicare e dividere per

$$\left(\sqrt[3]{(y^2 + y^3)}\right)^2 + y\sqrt[3]{y^2 + y^3} + y^2.$$

Il limite (tenendo conto del prodotto notevole) diventa quindi

$$q = \lim_{y\to+\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{y^2 + y^3}\right)^3 - y^3}{\left(\sqrt[3]{(y^2 + y^3)}\right)^2 + y\sqrt[3]{y^2 + y^3} + y^2} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^2}{3y^2} = \frac{1}{3},$$

dove abbiamo usato che

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{(y^2 + y^3)}\right)^2 + y\sqrt[3]{y^2 + y^3} + y^2}{y^2} = 3.$$

Dunque l'asintoto obliquo a $-\infty$ è $y = -x + \frac{1}{3}$.

4. Calcolare l'asintoto a $-\infty$ di

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^3 + \sqrt{x^6 + x^5}}.$$

Dato che non è chiaro quale sia l'andamento di questa funzione, cerchiamo un asintoto della forma $y = mx + q$, usando la formula

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + 3}{x} \frac{1}{x^3 + \sqrt{x^6 + x^5}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^3 + \sqrt{x^6 + x^5}}.$$

Il denominatore dà una forma indeterminata $-\infty + \infty$, quindi ci conviene razionalizzare, moltiplicando e dividendo per $x^3 - \sqrt{x^6 + x^5}$. Il limite diventa

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x\left(x^3 - \sqrt{x^6 + x^5}\right)}{x^6 - (x^6 + x^5)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^4}{-x^5} = 0,$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - \sqrt{x^6 + x^5}}{x^3} = \lim_{t \to +\infty} \frac{-t^3 - \sqrt{t^6 - t^5}}{-t^3} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^3 + \sqrt{t^6 - t^5}}{t^3} = 2$$

($t = -x$). Dunque non esite un asintoto obliquo.

Dato che il calcolo ci dà $m = 0$, vediamo se esiste un asintoto orizzontale $y = L$. Il calcolo è molto simile

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + 3}{x^3 + \sqrt{x^6 + x^5}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x^3 + \sqrt{x^6 + x^5}} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2\left(x^3 - \sqrt{x^6 + x^5}\right)}{x^6 - (x^6 + x^5)} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^5}{-x^5} = -4. \end{aligned}$$

L'asintoto orizzontale è quindi $y = -4$.

22 ESERCIZI

1. Costruire una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ che verifica quattro o più delle seguenti condizioni (mescolarle a piacere, quando possibile)

(a) è continua;
(b) è continua da destra;
(c) ha un asintoto verticale in 1
(d) ha un punto di discontinuità in 1
(e) ha $y = 3$ asintoto orizzontale a $-\infty$
(f) ha $y = \pi$ asintoto orizzontale a $+\infty$
(g) ha un solo punto di massimo
(h) non ha punti di minimo
(e) è strettamente monotona
(f) è monotona ma non strettamente
(g) non ha limite a $+\infty$
(h) ha $y = 3x + e$ asintoto obliquo a $-\infty$
(i) è limitata
(j) è inferiormente limitata
(l) è superiormente limitata
(m) ha un punto di salto in $x = 1$
(n) ha due punti di minimo
(o) ha infiniti punti di massimo.

2. Usare il teorema degli zeri per provare che esiste una soluzione di

(a) $\sin x = 2\cos(\pi x)$
(b) $e^x - e^{-x} = \arctan x - 3$
(c) $\sqrt{|x-1|} = x$

23 LIMITI DI FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Come abbiamo visto, la definizione di limite coinvolge solo il concetto di convergenza di successione o la nozione di distanza, nelle due versioni che abbiamo dato. Ha quindi senso estendere la definizione di limite per funzioni $f : X \to \mathbb{R}^k$ dove X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^m$ in un punto di accumulazione x_0 di X: diremo che $f(x)$ CONVERGE a $L \in \mathbb{R}^k$ per $x \to x_0$ se abbiamo

$$f(x_n) \to L \text{ per tutte le successioni con } x_n \neq x_0 \text{ e } x_n \to x_0,$$

ovvero

$$|f(x_n) - L| \to 0 \text{ per tutte le successioni con } x_n \neq x_0 \text{ e } |x_n - x_0| \to 0,$$

dove il primo modulo è quello di $\mathbb{R}^k$, il secondo è quello di $\mathbb{R}^m$, oppure

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ |f(x_n) - L| \leq \varepsilon \text{ se } x_n \neq x_0 \text{ e } |x_n - x_0| \leq \delta.$$

Continuiamo a chiamare L il LIMITE per $x \to x_0$, usando gli stessi simboli usati fino ad adesso.

Notiamo che se $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x))$ e $L = (L_1, \ldots, L_k)$ allora, dato che

$$|f(x) - L| = \sqrt{(f_1(x) - L_1)^2 + \cdots + (f_k(x) - L_k)^2},$$

si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f_j(x) = L_j \forall j = 1, \ldots, k.$$

Questo ci dice che il problema del calcolo di un limite *vettoriale* ($k > 1$) è equivalente a k limiti *scalari* (ovvero di funzioni a valori in $\mathbb{R}$).

Esempio

$$\lim_{(x,y) \to (0,1)} \frac{(y + x) \sin x}{x} = 1.$$

Infatti, se $x_n \to 0$ e $y_n \to 0$ allora

$$\frac{(y_n + x_n) \sin x_n}{x_n} = y_n \frac{\sin x_n}{x_n} + \sin x_n \to 1$$

usando i teoremi di prodotto e somma di limiti di successioni e il limite fondamentale.

Se $k = 1$ allora possiamo definire anche

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \qquad (\text{ o } -\infty)$$

se $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0 \Rightarrow f(x_n) \to +\infty$ $(-\infty)$.

Esempio

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = +\infty.$$

Infatti se $(x_n, y_n) \to (0,0)$ e $(x_n, y_n) \neq (0,0)$ allora $a_n = x_n^2 + y_n^2 \to 0^+$ e

$$\lim \frac{1}{a_n} = +\infty.$$

Una condizione necessaria
Se $f : X \to \mathbb{R}$ ed esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L,$$

e se $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ è una CURVA, ovvero una funzione continua con valori in $\mathbb{R}^m$, tale che $\gamma(t) = x_0$ se e solo se $t = 0$, allora

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = L.$$

Esempio (non esistenza - I) Per mostrare che non esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+3y^2}{3x^2+y^2}$$

basta scegliere due curve su cui la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2+3y^2}{3x^2+y^2}$$

ha limiti diversi. La scelta più semplice sono l'asse delle x e delle y. Nel primo caso $\gamma(t) = (t, 0)$ e

$$f(\gamma(t)) = \frac{t^2}{3t^2} = \frac{1}{3};$$

Nel secondo caso $\gamma(t) = (0, t)$ e

$$f(\gamma(t)) = \frac{3t^2}{t^2} = 3.$$

Per mostrare che non esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{3x^2+y^2}$$

la scelta è un po' più complicata poiché il limite è 0 sia lungo l'asse delle x che quello delle y. Se scegliamo invece $\gamma(t) = (t, mt)$ (ovvero calcoliamo il limite lungo la retta $y = mx$) abbiamo

$$f(\gamma(t)) = \frac{mt^2}{3t^2 + m^2t^2} = \frac{m}{3 + m^2}$$

che dà limiti diversi a seconda di m. Quindi il limite non esiste.

Esempio (non esistenza - II) Per mostrare che non esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{y^2 + x^4}$$

non basta guardare le curve che descrivono le rette per $(0,0)$. Infatti se $\gamma(t) = (at, bt)$ con $ab \neq 0$, si ha

$$f(\gamma(t)) = \frac{a^2bt^3}{b^2t^2 + a^4t^4}$$

Se $b = 0$ allora $f(\gamma(t)) = 0$; se invece $b \neq 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{a^2bt^3}{b^2t^2 + o(t^2)} = 0.$$

Quindi il limite è sempre 0. Questo **non basta** per concludere che il limite cercato sia 0. Infatti, scegliendo come curva una parabola $\gamma(t) = (t, mt^2)$ con $m \neq 0$, si ha

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{mt^4}{m^2t^4 + t^4} = \frac{m}{1 + m^2} \neq 0,$$

quindi il limite non esiste.

Esempio (non esistenza - III) Costruiamo un esempio più elaborato: definiamo

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x^2 \text{ e } x \neq 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Chiaramente il limite non esiste: se scegliamo $\gamma(t) = (t, 0)$ (l'asse x) allora $f(\gamma(t)) = 0$ per ogni t (con limite 0), mentre se $\gamma(t) = (t, t^2)$ (ovvero $y = x^2$), allora

$$f(\gamma(t)) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

con limite 1. Se invece scelgo $\gamma(t) = (t, mt)$ con $m \neq 0$,

$$f(\gamma(t)) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq m \\ 1 & \text{se } t = m. \end{cases}$$

In ogni caso il limite non solo è 0, ma la funzione $f(\gamma(t))$ è uguale alla costante 0 in un intervallo che comprende lo 0.

Esempio (verifica del limite mediante le coordinate polari) Per semplicità ci limitiamo a limiti in $(0,0)$. Per verificare o meno che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$$

(in pratica, il candidato L si otterrà facendo un limite su una curva "facile", per esempio un'asse) si deve vedere che tende a 0 la differenza $|f(x,y)-L|$ quando (x,y) sta su una circonferenza di raggio ρ, quando $\rho \to 0^+$. Ovvero, scrivendo $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$,

$$\lim_{\rho\to 0^+} \sup\{|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - L| : 0 \le \theta \le 2\pi\} = 0.$$

Questo procedimento permette di ricondurre un calcolo 2-dimensionale a due calcoli in una dimensione (il primo un calcolo (o la stima) di un estremo superiore al variare di θ, con ρ fisso, e il secondo il calcolo di un limite per $\rho \to 0^+$).

Esempio. Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$$

Lungo l'asse x (per $y=0$) la funzione vale x^2 che ha limite 0 in 0. Dunque il candidato L è 0. Fissato ρ, stimiamo

$$\begin{aligned} 0 \le \sup_\theta |f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| &= \sup_\theta \frac{\rho^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta)}{\rho^2} \\ &= \sup_\theta \rho^2(\cos^4\theta + \sin^4\theta) \le 2\rho^2. \end{aligned}$$

Dunque per il teorema dei due carabinieri

$$\lim_{\rho\to 0^+} \sup_\theta |f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| = 0$$

e il limite vale 0.

Teoremi di calcolo. Valgono invariati i teoremi di calcolo dei limiti (somma, prodotto, quoziente, composizione), dato che dipendono solo dalla nozione di convergenza di successioni. Per esempio, se esistono i limiti

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L, \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = L',$$

allora presa una qualsiasi successione $x_n \to x_0$ si ha $f(x_n) \to L$ e $g(x_n) \to L'$ e quindi $f(x_n)+g(x_n) \to L+L'$ per il teorema della somma di limiti di successioni. Dunque esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = L + L' = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x).$$

FUNZIONI CONTINUE

Rimane invariata la nozione di funzione continua: diciamo che f è CONTINUA in x_0 se $x_n \to x_0$ (in $\mathbb{R}^m$) implica $f(x_n) \to f(x_0)$. Dai teoremi sui limiti si ha che somma, prodotto, quoziente, composizione di funzioni continue sono continue.

Continuità delle componenti. Se $x_n = ((x_n)_1, \dots, (x_n)_m)$ tende al punto $x_0 = ((x_0)_1, \dots, (x_0)_m)$ allora in particolare $(x_n)_j \to (x_0)_j$ per ogni $j = 1, \dots, m$. Questo mostra che le funzioni

$$f_j(x_1, \dots, x_m) = x_j$$

(la COMPONENTE j-IMA di $x = (x_1, \dots, x_m)$) sono funzioni continue.

In particolare, in due dimensioni $(x, y) \mapsto x$ e $(x, y) \mapsto y$ sono funzioni continue.

Esempi. Sono funzioni continue:

1) $f(x, y) = \sin(x + y)$ perché somma e composizione di sin, $(x, y) \mapsto x$ e $(x, y) \mapsto y$;

2) $P(x, y) = x^2 + 3x^2y^2 + 2x^7y$ perché somma e prodotto di costanti e $(x, y) \mapsto x$ e $(x, y) \mapsto y$ (e analogamente ogni polinomio in x e y);

3) ogni funzione razionale, perché quoziente di polinomi in x e y;

4) espressioni algebriche di funzioni trigonimetriche, esponenziali, logaritmi, polinomi in x e y, ecc.

Si noti che i teoremi che abbiamo dimostrato in cui si usano successioni continuano a valere anche in $\mathbb{R}^m$. In particolare vale il **teorema di Bolzano-Weierstass**: *da una successione limitata si estrae una sottosuccessione convergente.* Per convincersene, consideriamo il caso di successioni in $\mathbb{R}^2$. Se $\{(x_n, y_n)\}$ è una successione limitata, allora in particolare $\{x_n\}$ è una successione limitata in $\mathbb{R}$ e quindi ne esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente a un x_0. Consideriamo adesso la successione $\{y_{n_k}\}$. Questa è limitata quindi ne esiste una (sotto-)sottosuccessione $\{y_{n_{k_j}}\}$ convergence a un y_0. Allora la successione $\{(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})\}$ converge a (x_0, y_0).

Chiameremo CHIUSO un insieme X che contiene tutti i suoi punti di accumulazione. Per esempio $\{x : |x| \leq R\}$ è una PALLA CHIUSA, mentre $\{x : |x| < R\}$ non è un insieme chiuso. Con questa definizione, ripercorrendo la dimostrazione già data per funzioni di una variabile, si dimostra il seguente teorema.

Teorema di Weierstass. *Sia X un insieme chiuso e limitato in $\mathbb{R}^m$ e $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ammette massimo e minimo.*

La determinazione di massimi e minimi per funzioni di più variabili sarà un argomento del corso di Analisi 2.