Una ricetta per il calcolo dell'asintoto obliquo

Se $f(x)$ è asintotica a $mx+q$ allora abbiamo $f(x)-mx-q=o(1)$, da cui (dividendo per x)

$$m=\frac{f(x)}{x}-\frac{q}{x}+\frac{1}{x}o(1)=\frac{f(x)}{x}+o(1),$$

mentre $q=f(x)-mx=o(1)$. Dunque si ha la seguente 'ricetta' per il calcolo di asintoti orizzontali/obliqui:
(1) si calcola il limite di $f(x)$. Se esiste finito ($=L$) questo da' l'asintoto orizzontale;
(2) se il limite è $\pm\infty$, allora si calcola il limite di $f(x)/x$. Se questo è infinito o non esiste, allora non c'e' asintoto. Se è finito il suo valore m ci da' il *coefficiente angolare* dell'asintoto;
(3) si calcola il limite di $f(x)-mx$. Se questo è finito allora il suo valore q da' il *termine noto* dell'asintoto

Esempio. Sia $f(x)=\log(7^x+15x-8)$. Il limite a $+\infty$ è $+\infty$, quindi non c'e' asintoto orizzontale. Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\Bigl(7^x\Bigl(1+\frac{15x}{7^x}-\frac{8}{7^x}\Bigr)\Bigr)}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log 7^x+\log\Bigl(1+\frac{15x}{7^x}-\frac{8}{7^x}\Bigr)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\log 7+o(1)}{x}=\log 7.$$

Dunque $m=\log 7$ e

$$q=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x\log 7)=\lim_{x\to+\infty}\log\Bigl(1+\frac{15x}{7^x}-\frac{8}{7^x}\Bigr)=0.$$

quindi l'asintoto obliquo è $x\log 7$.

Esempio. Sia $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4\log(1+x^3)}$. Notiamo che per $x\to+\infty$

$$f(x)=|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+4\frac{\log(1+x^3)}{x^2}}=x(1+o(1))=x+o(x).$$

Allora

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+o(x)}{x}=1,$$

e

$$q=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+4\log(1+x^3)}-x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+4\log(1+x^3)}{\sqrt{x^2+2x+4\log(1+x^3)}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + 4\log(1+x^3)}{2x + o(1)} = 1.$$

Quindi l'asintoto obliquo è $y = x + 1$.

Esempio. Sia $f(x) = x + \log x$. Questa funzione evidentemente non ammette asintoti a $+\infty$, anche se il calcolo da':

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (1 + \frac{\log x}{x}) = 1.$$

In questo caso pero' $q = +\infty$.

Equivalenza di andamenti asintotici

Diremo che f e g sono EQUIVALENTI per $x \to x_0$ se abbiamo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

In particolare se $x_0 = +\infty$ o $x_0 = -\infty$ ed esiste α tale che $f(x)$ è equivalente a $C|x|^\alpha$, diremo che α è l'ORDINE DI INFINITO (se $\alpha > 0$) o l'ORDINE DI INFINITESIMO (se $\alpha < 0$). La stessa nomenclatura vale se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f(x)$ è equivalente a $C|x-x_0|^\alpha$ (infinito se $\alpha < 0$, infinitesimo se $\alpha > 0$).

Esempio. $f(x) = \dfrac{1}{\sin(1/x)}$ ha ordine di infinito 1 per $x \to +\infty$;

$f(x) = \dfrac{5x^6 - 4x + 1}{x^3 + x^2 + 2} \log\Big(\dfrac{x+2}{x}\Big)$ ha ordine di infinito 2 per $x \to +\infty$.

20 PROPRIETÀ GLOBALI DELLE FUNZIONI CONTINUE.

20.1 IL TEOREMA DI WEIERSTRASS

Se una funzione è continua in un punto ci immaginiamo che disegnarne il grafico in quel punto sia come tracciare sul foglio una curva. In questa lezione e la prossima vediamo di rendere matematicamente rigorosa questa intuizione e le sue conseguenze.

Definizione f si dice CONTINUA se è continua in ogni punto del suo dominio.
NOTA: polinomi, esponenziali, funzioni trigonometriche sono continue. $x \mapsto \frac{1}{x}$ è continua (con dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$), $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ è continua (con dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Teorema. (di Weierstrass) *Ogni funzione reale continua in un intervallo chiuso e limitato ha massimo e minimo.*

DIMOSTRAZIONE Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Dimostriamo l'esistenza di un punto x_M in cui f ha massimo. Sappiamo che esiste sempre il $\sup f$; quindi dobbiamo mostrare che esiste x_M in cui $f(x_M) = \sup f$.

L'idea è considerare una successione che "quasi" raggiunge il $\sup f$, e, seguendola (o meglio seguendo una sua sottosuccessione convergente) raggiungere il desiderato x_M. A tale scopo fissiamo una successione crescente di punti $y_n < \sup f$ tali che $y_n \to \sup f$. Questo si può sempre fare: se $\sup f$ è finito si prende $y_n = \sup f - \frac{1}{n}$; se invece $\sup f = +\infty$ allora prendiamo $y_n = n$. Dato che $y_n < \sup f$ allora y_n non è un maggiorante per l'immagine di f, e quindi esiste un x_n tale che $f(x_n) \geq y_n$.

La successione $\{x_n\}$ è limitata. Potrebbe non convergere, ma sappiamo (dal teorema di Bolzano-Weierstrass) che ne esiste una sottosuccessione convergente $x_{n_k} \to x_0$, e $x_0 \in [a, b]$. Abbiamo

$$y_{n_k} \leq f(x_{n_k}) \leq \sup f,$$

quindi per il teorema dei due carabinieri esiste il limite

$$\lim_k f(x_{n_k}) = \sup f.$$

Ma per la continuità di f si ha anche $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ e quindi $f(x_0) = \sup f$ come desideravamo. Quindi questo x_0 è l'x_M voluto.

Per l'esistenza di un punto di minimo si procede allo stesso modo, con le dovute modifiche.

Corollario. Ogni funzione continua su un intervallo chiuso e limitato è limitata.

NOTA. La continuità è essenziale: la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in (0, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \text{ o } x = 1 \end{cases}$$

non ammette max/min in $[0,1]$ (dove non è continua), ne' in $(0,1)$ (dove è continua).

Alcune varianti al teorema di Weierstrass (in questi enunciati si può avere anche $a=-\infty$ e/o $b=+\infty$)

1) Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ continua e tale che

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to b-} f(x) = +\infty.$$

Allora esiste $\min f$. Per vederlo, fissiamo $M > \inf f$. Per le condizioni di limite esistono $a' > a$ e $b' < b$ tali che $f(x)\geq M$ se $a < x \leq a'$ o $b' \leq x < b$. Possiamo applicare il teorema di Weierstrass all'intervallo $[a',b']$. Il minimo trovato è anche il minimo di f su (a,b);

2) Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ continua e strettamente positiva, tale che

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to b-} f(x) = 0.$$

Allora esiste un punto di massimo di f. Per vedere questo, basta applicare la variante qui sopra a $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

Esempi. 1) La funzione $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2+1}$ ammette minimo su $\mathbb{R}$.

2) La funzione $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$ ammette massimo su $\mathbb{R}$.

20.2 IL TEOREMA DEGLI ZERI

Il seguente teorema afferma una cosa 'naturale' per una curva 'tracciata senza staccare la penna dal foglio': se il punto iniziale sta sopra l'asse delle x e quello finale sotto, ad un certo punto la curva deve attraversare l'asse delle x.

Teorema. (di Bolzano o "degli zeri") *Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a)f(b)<0$. Allora esiste almeno un punto $x\in(a,b)$ tale che $f(x)=0$.*

Dimostrazione La dimostrazione si ottiene usando il metodo di bisezione già utilizzato per il teorema di Bolzano-Weierstrass (andate a ridarci un'occhiata).

Consideriamo uno dei due casi possibili: per esempio, $f(a)>0$ e $f(b)<0$ (per l'altro la dimostrazione è analoga).

L'idea è di procedere per induzione. Illustriamo il primo passo: dividiamo a metà l'intervallo $[a,b]$, ottenendo due "semi-intervalli" $[a,\frac{a+b}{2}]$ e $[\frac{a+b}{2},b]$. Ci sono tre possibilità:

1) $f(\frac{a+b}{2})=0$. In questo caso si conclude, avendo trovato la soluzione;

2) $f(\frac{a+b}{2})>0$. In questo caso la funzione f verifica le ipotesi del teorema anche sull'intervallo $[\frac{a+b}{2},b]$;

3) $f(\frac{a+b}{2}) < 0$. In questo caso la funzione f verifica le ipotesi del teorema anche sull'intervallo $[a, \frac{a+b}{2}]$.

Quindi, nei casi 2) e 3) si è dimezzato l'intervallo su cui cercare la soluzione. Inoltre sul nuovo intervallo siamo nelle stesse ipotesi di prima e quindi possiamo rifare lo stesso ragionamento, dividendolo in due ulteriori semi-intervalli, ecc.

Dunque, procedendo per induzione, si hanno due possibilità.

1) dopo un numero finito di passi si trova che la funzione si annulla in uno dei due estremi di un intervallo ottenuto dividendo ripetutamente in due l'intervallo di partenza, e quindi si ha una soluzione;

2) si costruiscono intervalli $[a, b] = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, con $I_n = [a_n, b_n]$ un "semi-intervallo" di I_{n-1} (costruito come sopra) tale che

$$f(a_n) > 0, \qquad f(b_n) < 0.$$

Come per il teorema di Bolzano-Weierstrass, $\{a_n\}$ è una successione monotona crescente e $\{b_n\}$ una successione monotona decrescente; inoltre $b_n - a_n = 2^{-n}(b-a)$ per cui le due successioni tendono ad uno stesso punto x_0.

Per la continuità di f e il fatto che $f(a_n) \geq 0$ si ha $f(x_0) \geq 0$, e per il fatto che $f(b_n) \leq 0$ si ha $f(x_0) \leq 0$. Dunque deve essere $f(x_0) = 0$, e abbiamo trovato la soluzione cercata.

Esempio. Sia P un polinomio di grado 3. Allora l'equazione $P(x) = 0$ ha almeno una soluzione.

Infatti, per esempio, a meno di dividere per il coefficiente di x^3 se $P(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ si ha $P(x) \to \pm\infty$ per $x \to \pm\infty$. Quindi esiste M tale che $f(-M) < 0$ e $f(M) = 0$. Possiamo quindi applicare il teorema con $a = -M$ e $b = M$.

La stessa cosa vale per un qualsiasi polinomio di grado *dispari*.

Esempio. Proviamo che esiste un numero $x > 0$ tale che

$$e^x = \frac{1}{x}.$$

Questo problema si risolve con una 'risoluzione grafica': vicino allo 0 il grafico di e^x 'sta sotto' a quello di $1/x$, verso $+\infty$ la situazione si capovolge, quindi ci deve essere un punto in cui i grafici si intersecano... in questo ragionamento stiamo usando in verità la continuità delle funzioni come nel teorema degli zeri.

Per applicare il teorema degli zeri, consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} - e^x.$$

Dato che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ esiste $a > 0$ tale che $f(a) > 0$; dato che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, esiste $b > a$ tale che $f(b) < 0$. A questo punto il teorema degli zeri ci assicura che esiste $x \in (a, b)$ tale che $f(x) = 0$, che è quello che volevamo.

Esempio. Trovare (se esiste) il

$$\min\Big\{\log\Big(3+\Big|e^x-\frac{1}{x}\Big|\Big) : x>0\Big\}.$$

Per quello che abbiamo visto sopra, esiste un punto in cui la quantità nel modulo si annulla, per cui il minimo è ottenuto in questo punto e vale $\log 3$.

NOTAZIONE: se $f : A \to B$ è una funzione e $C \subseteq A$, allora definiamo $f(C) = \{f(x) :\ x \in C\} \subseteq B$. In particolare $f(dom f)$ è l'*immagine* di f.

Teorema. ("dei valori intermedi") *Sia I intervallo, e $f : I \to \mathbb{R}$ continua, allora $f(I)$ è intervallo*

DIMOSTRAZIONE Dobbiamo mostrare che se $x, y \in f(I)$ e $x < z < y$, allora $z \in f(I)$.

Siano $c, d \in I$ tali che $f(c) = x$, $f(d) = y$. Allora possiamo considerare la funzione $g(x) = f(x) - z$ sull'intervallo $[a, b] = [\min\{c, d\}, \max\{c, d\}]$. Si ha allora $g(a)g(b) < 0$ e g è continua. Per il teorema di Bolzano $\exists\ x \in (a, b)$: $g(x) = 0$, ovvero $f(x) = z$. I intervallo $\Longrightarrow x \in I \Longrightarrow z \in f(I)$.

NOTA. Questo teorema ci dice che per provare che l'equazione $f(x) = y$ ha soluzione, nel caso di f continua e definita su un intervallo chiuso e limitato, allora basta verificare che $\min f \le y \le \max f$.

20.3 INVERTIBILITÀ E CONTINUITÀ

Ricordiamo che se A, B sono insiemi e $f : A \to B$ è una funzione INIETTIVA, ovvero $a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$, allora la relazione $g(b) = a \iff f(a) = b$ definisce una funzione $g : Im\, f \to A$ ($Im\, f$ l'immagine di f). Questa funzione g si chiama la FUNZIONE INVERSA di f e viene denotata con f^{-1}. Una funzione iniettiva si dice anche INVERTIBILE.

NOTA: a volte si richiede anche che l'immagine di f sia B (si dice in questo caso che f è SURIETTIVA, o surgettiva), di modo che l'inversa sia $f^{-1} : B \to A$. Questo in generale non è richiesto nei problemi di Analisi, mentre è una questione fondamentale in altri tipi di problemi.

Esempi. (1) $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ è l'inversa del seno (o meglio della sua restrizione a $[-\pi/2, \pi/2]$);
(2) $\arctan : \mathbb{R} \to [-\pi/2, \pi/2]$ è l'inversa della tangente (o meglio della sua restrizione a $[-\pi/2, \pi/2]$);
(3) $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è l'inversa di a^x ($a > 0$, $a \neq 1$).

In tutti questi casi notiamo che la funzione f è una funzione strettamente monotona. Vediamo che questo non è un caso: per le funzioni continue (definite su un intervallo!) dire invertibile o strettamente monotona è la stessa cosa. Questo sarà importante in seguito, quando vedremo che per certe funzioni è facile determinare la stretta monotonia tramite le derivate.

Teorema. *Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è invertibile $\iff$ f è strettamente monotona. In tal caso $\mathrm{dom} f^{-1}$ è un intervallo e f^{-1} è continua*

DIMOSTRAZIONE L'implicazione f strettamente monotona $\implies$ f invertibile è sempre valida (anche quando f non è continua), perchè una funzione strettamente monotona è chiaramente iniettiva.

Proviamo l'implicazione inversa, ovvero che se f non è strettamente monotona allora f non è iniettiva. Se f non è strettamente monotona allora possiamo trovare tre punti x_1, x_2 e x_3 con $x_1 < x_2 < x_3$ e tali che $f(x_2) \leq f(x_1)$ e $f(x_2) \leq f(x_3)$, oppure $f(x_2) \geq f(x_1)$ e $f(x_2) \geq f(x_3)$.

Prendiamo il primo dei due casi: $f(x_2) \leq f(x_1)$ e $f(x_2) \leq f(x_3)$. Se una delle due diseguaglianze è un'uguaglianza allora la funzione non è iniettiva e quindi la dimostrazione è finita. Altrimenti si ha $f(x_2) < f(x_1)$ e $f(x_2) < f(x_3)$. Consideriamo allora un punto y tale che

$$f(x_2) < y < \min\{f(x_1), f(x_3)\}.$$

Dato che $f(x_2) < y < f(x_1)$ possiamo applicare il teorema dei valori intermedi all'intervallo $[x_1, x_2]$ e trovare un punto $x' \in (x_1, x_2)$ tale che $f(x') = y$. Dato che $f(x_2) < y < f(x_3)$ possiamo applicare il teorema dei valori intermedi all'intervallo $[x_2, x_3]$ e trovare un punto $x'' \in (x_2, x_3)$ tale che $f(x'') = y$. Questo mostra che f non è iniettiva.

Dato che f è continua e definita su un intervallo la sua immagine (ovvero il dominio dell'inversa) è un intervallo per il teorema dei valori intermedi. Vediamo che f^{-1} è continua: dobbiamo vedere che se $y_n \to y$ allora $x_n = f^{-1}(y_n) \to x = f^{-1}(y)$. Se così non fosse allora (a meno di estrarre sottosuccessioni) $x_n \to x'$ con $x \neq x'$ (o x_n diverge) e allora $y_n = f(x_n)$ tende a $y' = f(x')$ con $y' \neq y$ (similmente, se x_n diverge y_n non tende a y).

Esempio. arcsin, arctan, log sono funzioni continue.

Domanda. Il teorema resta vero per funzioni che non siano continue, o che, pur essendo continue non sono definite su un intervallo?

La risposta è NO: entrambe le condizioni sono necessarie. Infatti ci sono funzioni continue (non definite su intervalli) invertibili ma non strettamente monotone. Per esempio:

$$f(x) = \frac{1}{x} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

che è l'inversa di se stessa.

Ci sono anche funzioni definite su intervalli (non continue) invertibili ma non strettamente monotone. Ne costruiamo facilmente una: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in (-1, 1), \\ -x & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Anche questa è l'inversa di se stessa.