14 LIMITI DI FUNZIONI

Estendiamo la nozione di LIMITE a funzioni reali di variabile reale (e in generale a funzioni definire in sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ e a valori in $\mathbb{R}^k$).

Definizione (caratterizzazione per successioni) Si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

($x_0, L \in \overline{\mathbb{R}}$) se e solo se per ogni successione $a_n \to x_0$ con $a_n \neq x_0$ (almeno per n grande) si ha $\lim_n f(a_n) = L$.

Osservazione. La definizione ha senso se esiste almeno una successione $a_n \to x_0$ nel dominio di f con $a_n \neq x_0$. Diremo in tal caso che x_0 è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE del dominio di f, o che x_0 **non è** un PUNTO ISOLATO del dominio di f.

Grazie a questa definizione si ha immediatamente che **teoremi di somma, prodotto, quoziente, confronto, e dei due carabinieri continuano a valere per i limiti di funzioni con lo stesso enunciato dei limiti di successioni**.

Limiti all'infinito

La definizione per successioni si traduce nella seguente.

Definizione Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; diremo che $f(x)$ TENDE al numero $L \in \mathbb{R}$ per $x \to +\infty$ se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 :\ x \geq M \Longrightarrow |L - f(x)| \leq \varepsilon.$$

In tal caso il numero L si dice il LIMITE di f per $x \to +\infty$, e si scrive $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Allo stesso modo si definiscono

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall N > 0\ \exists M > 0 :\ \forall x \geq M\ \ f(x) \geq N,$

ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall N > 0\ \exists M > 0 :\ \forall x \geq M\ f(x) \leq -N.$

La nozione di limite per $x \to -\infty$ viene data per simmetria:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 :\ \forall x \leq -M\ \ |f(x) - L| \leq \varepsilon,$$

ovvero $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(-x) = L.$

Ovviamente si estendono le definizioni di limiti $\pm\infty$.

Esempi. Molti esempi visti con le successioni si adattano a questo caso, per cui

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{1 + x^2} = 2, \qquad \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty, \text{ etc.}$$

Limiti al finito

Definizione Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$; diremo che $f(x)$ *tende* al numero $L \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ |x - x_0| \leq \delta, x \neq x_0 \Longrightarrow |L - f(x)| \leq \varepsilon.$$

In tal caso il numero L si dice il limite di f per $x \to x_0$, e si scrive $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

NOTA: x_0 non viene preso in considerazione perche non vogliamo che il valore di f in x_0 influenzi il limite.

Allo stesso modo si definiscono

i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall N > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x : \ |x - x_0| \leq \delta, x \neq x_0 \ \ f(x) \geq N,$

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall N > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x : \ |x - x_0| \leq \delta, x \neq x_0 \ \ f(x) \leq -N.$

NOTA: le definizioni di limite ora date si possono riassumere con il linguaggio degli intorni: siano $L, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$; allora

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall$ intorno I di L esiste un intorno J di x_0 tale che se $x_0 \neq x \in J$, allora $f(x) \in I$.

NOTA. Per definire il limite per $x \to x_0$ basta che il dominio di f contenga un intorno "bucato" di x_0, ovvero un insieme del tipo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$.

Esempi.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty.$$

Sia $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq x_0 \\ 1 & \text{se } x = x_0. \end{cases}$ In questo caso $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, ma $f(x_0) = 1$.

Esempi di non esistenza

Per dimostrare che un limite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ non esiste basta trovare due successioni a_n e a'_n che convergono entrambe a x_0, ma tali che $\lim_n f(a_n) \neq \lim_n f(a'_n)$.

Applicheremo questo criterio agli esempi qui di seguito.

Esempio 1. $f(x) = \sin x$, $x_0 = +\infty$. Non esiste

$$\lim_{x \to +\infty} \sin x$$

Basta prendere

$$a_n = n\pi, \qquad a'_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to +\infty$, ma

$$f(a_n) = 0 \to 0, \qquad f(a'_n) = 1 \to 1.$$

Esempio 2. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$. Non esiste

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$

Basta prendere

$$a_n = \frac{1}{n\pi}, \qquad a'_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to 0$, ma

$$f(a_n) = 0 \to 0, \qquad f(a'_n) = 1 \to 1.$$

Esempio 3. $f(x) = \sin x$, $x_0 = +\infty$. Non esiste

$$\lim_{x \to +\infty} x \sin x$$

Basta prendere

$$a_n = n\pi, \qquad a'_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to +\infty$, ma

$$f(a_n) = 0 \to 0, \qquad f(a'_n) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \to +\infty.$$

Definiamo la funzione **parte intera** di x come

$$[x] = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$$

(questa è una buona definizione. Qui si usa la proprietà che *ogni insieme superiormente limitato e non vuoto di $\mathbb{Z}$ ha massimo*).
NOTA: se si scrive x nella forma decimale e $x \geq 0$ allora $[x]$ coincide con il numero 'prima della virgola' (bisogna solo evitare di scrivere $0,999999....$ invece di 1). Questa regola non è valida per $x < 0$. Infatti la parte intera di $-0,5$ è -1.

Esempio 4. $f(x) = [x]$, $x_0 = 0$. Non esiste

$$\lim_{x \to 0} [x]$$

Basta prendere

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad a'_n = -\frac{1}{n}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to 0$, ma

$$f(a_n) = 0 \to 0, \qquad f(a'_n) = -1 \to -1.$$

Definiamo la funzione **segno** di x come

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Esempio 5. $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x_0 = 0$. Non esiste

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sign} x$$

Basta prendere

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad a'_n = -\frac{1}{n}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to 0$, ma

$$f(a_n) = 1 \to 1, \qquad f(a'_n) = -1 \to -1.$$

Esempio 6. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$. Non esiste

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

Basta prendere

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad a'_n = -\frac{1}{n}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to 0$, ma

$$f(a_n) = n \to +\infty, \qquad f(a'_n) = -n \to -\infty.$$

Esempio 7. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}$, $x_0 = 0$. Non esiste

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$$

Basta prendere

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad a'_n = -\frac{1}{n}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to 0$, ma

$$f(a_n) = 0 \to 0, \qquad f(a'_n) = -2n \to -\infty.$$

15 CALCOLO DEI LIMITI - FUNZIONI CONTINUE IN x_0

Il calcolo dei limiti viene spesso semplificato nel semplice calcolo di una funzione nel punto in cui si calcola il limite.

Definizione Una funzione f si dice CONTINUA NEL PUNTO x_0 quando si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Esempio. Il più semplice esempio di funzione che ammette limite in x_0 ma non è continua in x_0 è $f(x) = (\text{sign}(x))^2 = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq x_0 \\ 0 & \text{se } x = x_0. \end{cases}$

Per i teoremi sui limiti si ha:

Teorema. *Somma, differenza, prodotto di funzioni f e g continue in x_0 sono continue in x_0. Se $g \neq 0$ in un intorno di x_0, allora anche $\dfrac{f}{g}$ è continua in x_0.*

Corollario. I polinomi sono funzioni continue in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. Le funzioni razionali sono continue in ogni punto del loro dominio.

DIMOSTRAZIONE Le costanti e la funzione identità $x \mapsto x$ sono ovviamente continue. Basta quindi applicare il teorema precedente. □

Proposizione. *Gli esponenziali, i logaritmi,* cos, sin *sono funzioni continue.*

Il calcolo dei limiti si riconduce spesso a trovare una funzione continua in x_0 che è uguale (o 'molto simile') alla funzione di cui si vuole calcolare il limite in x_0.

Esempio. Per calcolare il limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

(che è una forma indeterminata $\pm\infty / \pm\infty$) si nota che per $x \neq 1$

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = x + 1,$$

quindi

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2,$$

dato che $x + 1$ è continua e vale 2 in $x = 1$.

Esempio. Calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}).$$

Il limite è nella forma indeterminata $+\infty - \infty$. Moltiplicando e dividendo per $(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$ si ottiene

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1) - x)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$

A questo punto abbiamo una forma $1/+\infty$, e quindi il limite è 0.

Esempio. Calcolare

$$\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x).$$

Il limite è nella forma indeterminata $+\infty - \infty$. Moltiplicando e dividendo per $(\sqrt{x^2 + x} - x)$ si ottiene

$$\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} + x)(\sqrt{x^2 + x} - x)}{(\sqrt{x^2 + x} - x)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{(x^2 + x) - x^2)}{\sqrt{x^2 + x} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x}.$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-x(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1)} = -\frac{1}{2}.$$

LIMITI FONDAMENTALI (prima parte)

1. Il limite che permette il calcolo di forme indeterminate in cui sono presenti funzioni trigonometriche è:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

La dimostrazione di questo limite si ha subito dalla disuguaglianza trigonometrica (per $x > 0$)

$$\sin x \leq x \leq \tan x,$$

da cui si ottiene (dividendo per $\sin x$ e prendendo gli inversi)

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

La stessa disuguaglianza si ottiene per $x < 0$. Il limite si ottiene usando il teorema dei due carabinieri e la continuità del coseno.

Esempio.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1,$$

poichè si può scrivere

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

2. Il secondo limite fondamentale è

$$\lim_{x \to +\infty} \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x = e.$$

Lo deduciamo dal corrispondente limite di successioni

$$\lim_n \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n = e.$$

Infatti per $x > 0$ prendiamo $n = [x]$ (la parte intera di x). Abbiamo le diseguaglianze

$$n \leq x \leq n+1, \qquad \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n},$$

da cui

$$\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^x \leq \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x \leq \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^x,$$

Inoltre (per la monotonia delle esponenziali di base > 1) si ha

$$\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^x \geq \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^n = \frac{\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n}},$$

e anche

$$\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^x \leq \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n+1} = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \Big(1 + \frac{1}{n}\Big).$$

In conclusione, abbiamo la doppia diseguaglianza

$$\frac{\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n}} \leq \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x \leq \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \Big(1 + \frac{1}{n}\Big).$$

Quando $x \to +\infty$ (e in corrispondenza $n \to +\infty$) i termini estermi della diseguqglianza tendono ad e, e il limite è dimostrato per il teorema dei due carabinieri.

Limiti e composizione

L'operazione di limite si 'comporta bene' per composizione con funzioni continue.

Teorema. *Sia* $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$ *e sia* f *continua in* y_0*. Allora esiste*

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(y_0).$$

Questo teorema ci dice che se $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$ e se f è continua in y_0, per calcolare il limite

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)),$$

basta porre $y = g(x)$ e calcolare il limite

$$\lim_{y\to y_0} f(y).$$

Se f è continua questo limite è $f(y_0)$. Un altro modo per scrivere il risultato è che se f è continua allora

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\Big(\lim_{x\to x_0} g(x)\Big).$$

Corollario. *Se* g *è continua in* x_0 *e* f *è continua in* $y_0 = g(x_0)$ *allora la composizione* $f\circ g$ *è continua in* x_0*.*

Esempio. Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

Per ricondurci al limite fondamentale, moltiplichiamo e dividiamo per $(1+\cos x)$, per cui (ricordandoci che $1-\cos^2 x = \sin^2 x$)

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}.$$

Dato che $(1+\cos x)\to 2$, abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2.$$

Possiamo vedere quest'ultimo limite come composizione delle funzioni

$$g(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad f(y) = y^2,$$

e applicare il teorema con $y_0 = 1$. Dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Esempio. Calcoliamo
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

Si ha
$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2},$$
quindi il limite vale $1/2$.

Esempio. Mostriamo che in generale non si può sostituire l'ipotesi che f sia continua in y_0 con l'ipotesi che esista il $\lim\limits_{y\to y_0} f(y)$.

Basta infatti prendere $f(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \neq 0 \\ 1 & \text{se } y = 0 \end{cases}$ e g la costante 0. Allora per ogni x_0 abbiamo
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = 0,$$
per cui $y_0 = 0$, ma
$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = 1 \neq 0 = \lim_{y\to 0} f(y).$$

La ragione per cui non vale la conclusione del teorema in questo esempio è che la funzione g prende il valore 0 che è 'proibito' nel calcolo del limite $\lim\limits_{y\to 0} f(y)$. Se si evita il valore 'proibito' il teorema vale come segue:
Teorema. *Se* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = L$, *e* $g(x) \neq y_0$ *per* $x \neq x_0$ *(per* x *sufficientemente vicino a* x_0*), allora*
$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = L.$$

Esempio. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x+x^2)}{10x+7x^2}.$$

Scriviamo
$$\frac{\sin(5x+x^2)}{10x+7x^2} = \frac{\sin(5x+x^2)}{5x+x^2} \cdot \frac{5x+x^2}{10x+7x^2}.$$
Si ha
$$\lim_{x\to 0} \frac{5x+x^2}{10x+7x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(5+x)}{x(10+7x)} = \lim_{x\to 0} \frac{5+x}{10+7x} = \frac{1}{2},$$
per cui
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x+x^2)}{10x+7x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x+x^2)}{5x+x^2}.$$
Poniamo
$$g(x) = 5x + x^2, \qquad f(y) = \frac{\sin y}{y}.$$

Possiamo applicare il teorema con $x_0 = 0$, e

$$y_0 = \lim_{x \to 0} g(x) = 0,$$

dato che $g(x) \neq 0$ per $x \neq 0$ (per x sufficientemente vicino a x_0). Si ha allora

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(5x + x^2)}{5x + x^2} = \lim_{y \to 0} f(y) = 1.$$

Esempio. Si ha

$$\lim_{x \to -\infty} \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x = e.$$

Possiamo scrivere $y = -x$, per cui

$$\lim_{x \to -\infty} \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x = \lim_{y \to +\infty} \Big(1 - \frac{1}{y}\Big)^{-y}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \Big(\frac{y-1}{y}\Big)^{-y} = \lim_{y \to +\infty} \Big(\frac{y}{y-1}\Big)^{y}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \Big(\frac{y-1}{y}\Big)^{-y} = \lim_{y \to +\infty} \Big(1 + \frac{1}{y-1}\Big)^{y}$$

Poniamo $z = y - 1$. Allora si ha

$$= \lim_{y \to +\infty} \Big(1 + \frac{1}{y-1}\Big)^{y} = \lim_{z \to +\infty} \Big(1 + \frac{1}{z}\Big)^{z+1}$$

$$= \lim_{z \to +\infty} \Big(1 + \frac{1}{z}\Big)^{z} \Big(1 + \frac{1}{z}\Big) = e.$$

Esempio. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \Big(1 + \frac{a}{x}\Big)^x = e^a.$$

Se $a = 0$ il limite è banale. Altrimenti si usa la sostituzione $y = x/a$.

16 LIMITI DESTRO E SINISTRO

Definizione Se f è definita in un qualche intervallo della forma $(x_0, x_0+\delta)$ allora si definisce il LIMITE DESTRO DI f IN x_0 e scriviamo

$$\lim_{x \to x_0+} f(x)$$

se nella definizione di limite teniamo conto solo dei punti $x > x_0$. Simmetricamente si definisce il LIMITE SINISTRO DI f IN x_0 e scriviamo

$$\lim_{x \to x_0-} f(x).$$

ESEMPIO: la funzione parte intera non ammette limite per $x \to 0$, però si ha

$$\lim_{x \to 0-} [x] = -1 \qquad \lim_{x \to 0+} [x] = 0.$$

Analogamente

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Proposizione. *Sono equivalenti le condizioni:*

i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

ii) $\lim_{x \to x_0+} f(x) = L$ *e* $\lim_{x \to x_0-} f(x) = L$.

DIMOSTRAZIONE i) $\Longrightarrow$ ii): fissato ε (oppure M se il limite è $\pm\infty$) il δ che va bene per la def. di limite va bene anche per i limiti destro e sinistro;
ii) $\Longrightarrow$ i): fissato ε (oppure M...) si trova δ' (risp. δ'') tale che se $x \in (x_0 - \delta', x_0)$ (risp. se $x \in (x_0, x_0 + \delta'')$ allora $|f(x) - L| \le \varepsilon$ (risp. $f(x) \ge M$...). Prendendo $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ questo va bene nella def. di limite. $\square$

La proposizione precedente è utile nel calcolo dei limiti che si possono suddividere nel calcolo separato di limite destro e sinistro.

Esempio. Si ha

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

Per provarlo mostriamo che coincidono i limiti destro e sinistro. Per il destro si ha, scrivendo $y = 1/x$,

$$\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{1/x} = \lim_{y \to +\infty} \Big(1 + \frac{1}{y}\Big)^y = e.$$

Analogamente per il sisistro.

LIMITI FONDAMENTALI (seconda parte)

3. Il limite che permette il calcolo di forme indeterminate in cui sono presenti funzioni logaritmiche è:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

La dimostrazione di questo limite si ha subito dal limite

$$\lim_{x\to 0} \Big(1+x\Big)^{1/x} = e.$$

Esempio. Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}.$$

Scriviamo

$$\log(\cos x) = \log(1 + (\cos x - 1)),$$

per cui (pongo $y = \cos x - 1$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{\cos x - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1.$$

Allora il limite diventa

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

4. Il limite che permette di trattare limiti al finito in cui è presente un'esponenziale è

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Questo limite si ottiene subito dal precedente, scrivendo

$$e^x - 1 = y, \qquad x = \log(1+y),$$

per cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1.$$

Esempio. Se $a > 0$ allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a.$$

Infatti, basta scrivere

$$a^x = e^{x\log a},$$

e usare la sostituzione $y = x\log a$.

Esempio. Calcoliamo
$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}.$$
Il limite è nella forma $1^{+\infty}$. Per ricondurlo ad una forma nota, riscriviamo la funzione in base e
$$(\cos x)^{1/x^2} = e^{\log(\cos x)/x^2}.$$
Dato che e^y è continua e
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} = -\frac{1}{2},$$
il limite vale $e^{-1/2}$.

Nota. *Abbiamo usato l'uguaglianza*
$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)},$$
che si usa spesso per trattare le forme esponenziali quando la base è una funzione.

Esempio. Per calcolare
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$$
scriviamo la funzione come
$$e^{\frac{\sin x}{x-\sin x}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}.$$
Con il cambio di variabili
$$\frac{\sin x}{x} - 1 = y,$$
si ha
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{\frac{\sin x}{x} - 1} \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1,$$
quindi
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x-\sin x}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x-\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right) \\ = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x-\sin x}\cdot\frac{\sin x - x}{x} &= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = -1,\end{aligned}$$
e il limite vale e^{-1}.

17 ALCUNI ESERCIZI SUI LIMITI FONDAMENTALI

Risolvere i seguenti esercizi facendo uso dei limiti fondamentali.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$;

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi 4^x)}{\sin(4^{\pi x}-1)}$;

3. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)^{2/x}}{(1+7x)^{1/x}}$;

4. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)^{2x}-1}{\sin(x^2)}$;

5. $\lim_{x\to +\infty} x^4\Big(\log\Big(4+x^4\Big) - 4\log x\Big)$;

6. $\lim_{x\to +\infty} x^2\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{1/x}$.

Traccia delle soluzioni

1. Dal limite fondamentale $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x}{\tan 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x\cos 5x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{\sin 5x} = 1$$

per cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

2. Dato che il limite fondamentale per il seno è in 0, dobbiamo riportarci in 0 notando che $\sin y = -\sin(y-\pi)$. Si ha quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi 4^x)}{\sin(4^{\pi x}-1)} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi 4^x - \pi)}{\sin(4^{\pi x}-1)} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi(4^x-1))}{\sin(4^{\pi x}-1)}$$

Dal limite fondamentale, (posto $y = \pi(4^x - 1)$) abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi(4^x - 1))}{\pi(4^x - 1)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

e (posto $y = 4^{\pi x} - 1$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{4^{\pi x} - 1}{\sin(4^{\pi x} - 1)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

Abbiamo quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi 4^x)}{\sin(4^{\pi x} - 1)} = -\lim_{x\to 0} \frac{\pi(4^x - 1)}{4^{\pi x} - 1}.$$

Usiamo adesso il limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log a} - 1}{x} = \log a$$

per ottenere

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi 4^x)}{\sin(4^{\pi x} - 1)} = -\lim_{x\to 0} \frac{\pi(4^x - 1)}{x} \cdot \frac{x}{(4^\pi)^x - 1} = -\lim_{x\to 0} \pi \log 4 \cdot \frac{1}{\log 4^\pi} = -1.$$

3. Ricordiamo che

$$\lim_{x\to 0} (1 + ax)^{b/x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{b}{x}\log(1+ax)} = e^{ab}.$$

Si ha quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 + 3x)^{2/x}}{(1 + 7x)^{1/x}} = \frac{e^6}{e^7} = \frac{1}{e}.$$

4. Scrivendo $(1 + 3x)^{2x} = e^{2x\log(1+3x)}$ abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 + 3x)^{2x} - 1}{\sin(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x\log(1+3x)} - 1}{2x\log(1 + 3x)} \cdot \frac{x^2}{\sin(x^2)} \cdot \frac{2x\log(1 + 3x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x\log(1 + 3x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{6\log(1 + 3x)}{3x} = 6$$

5. Dalle proprietà dei logaritmi

$$\lim_{x\to+\infty} x^4 \Big(\log\Big(4 + x^4\Big) - 4\log x\Big) = \lim_{x\to+\infty} x^4 \log\Big(1 + \frac{4}{x^4}\Big).$$

Se poniamo $y = 4/x^4$ abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} x^4 \log\left(1+\frac{4}{x^4}\right) = \lim_{y\to 0^+} 4\frac{\log(1+y)}{y} = 4.$$

6. Poniamo $y = 1/x$. Allora il limite diventa

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y^2}(1+y)^y = \lim_{y\to 0^+} \frac{e^{y\log(1+y)}}{y^2} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y^2} = +\infty.$$

18 CONFRONTI TRA FUNZIONI

Quando si ha una somma di più funzioni di cui si vuole calcolare il limite in un punto x_0 la 'strategia' è di individuare la funzione 'dominante' e isolarla da quelle 'trascurabili'.

Esempio. Per calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4+x^3+5}{6x^4+2x^2+x},$$

si nota che sia al nmeratore che al denominatore l'andamento 'dominante' è quello di x^4 per cui lo si isola:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4(3+\frac{1}{x}+5\frac{1}{x^4})}{x^4(6+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3})} = \frac{1}{2}.$$

In questo passaggio abbiamo usato il fatto che x^3, $2x^2$, x e 5 sono 'trascurabili rispetto a x^4', ovvero divise per x^4 tendono a 0 (sono infinitesime).

Introduciamo ora una notazione per esprimere questo concetto di confronto tra comportamenti di funzioni.

Definizione Diciamo che g è un O PICCOLO di f per $x \to x_0$ se si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

In tal caso si scrive $g = o(f)$ (per $x \to x_0$).

Questo concetto verrà usato nel seguente modo: se $g = o(f)$ allora (h è un'altra funzione)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{h(x)}$$

(ovvero g si può 'trascurare'). Per convincersene, basta scrivere

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\Big(1+\frac{g(x)}{f(x)}\Big)}{h(x)}.$$

Operazioni sugli o piccolo (1) $o(f)+o(f)=o(f)$ (ovvero: se sommiamo due funzioni trascurabili rispetto a f otteniamo ancora una funzione trascurabile rispetto a f)
(2) $o(o(f)) = o(f)$ (se una funzione è trascurabile rispetto ad una funzione trascurabile rispetto ad f, è trascurabile rispetto ad f)
(3) $g \cdot o(f) = o(fg)$ (se moltiplico una funzione trascurabile rispetto ad f per g ottengo una funzione trascurabile rispetto a fg)

(4) $o(f+o(f)) = o(f)$, ecc.
Nota: (a) $g = o(1)$ equivale a g infinitesima;
(b) a volte scriveremo $g << f$ invece di $g = o(f)$ (e a volte leggeremo 'f è molto più grande di g' (per $x \to x_0$)).

Esempio. Dai limiti fondamentali otteniamo (per $x \to 0$):

$$\sin x = x + o(x); \qquad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2);$$
$$e^x = 1 + x + o(x); \qquad \log(1+x) = x + o(x),$$

ecc.

Confronti tra 'infiniti' I limiti all'infinito calcolati per le successioni ci danno un certo numero di confronti per $x \to +\infty$:

$$1 << \log x << x^\alpha << x^\beta << a^x << b^x$$

per ogni $b > a > 1$ e $\beta > \alpha > 0$. Per dimostrare queste relazioni basta ricondursi agli analoghi limiti per successione tramite la funzione parte intera.
Esempio. Per calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x + x\log x + \sin x^2}{x + x\log x + 4^{-x}}$$

notiamo che

$$\sin x^2 \leq 1 << x\log x << 2^x$$

e

$$4^{-x} << x << x\log x,$$

quindi (eliminando le funzioni trascurabili) il limite è

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x\log x} = 0$$

(per esempio perchè $x\log x << x^2 << 2^x$).

Esempi.
(1) $\lim_{x\to 0^+} x\log x = 0$ (per provarlo basta porre $y = 1/x$);
(2) $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$ (per provarlo basta scrivere

$$x^x = e^{x\log x});$$

(3) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1}{x} = -\infty$. Per provarlo basta calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\log x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\log x} - 1}{x\log x} \cdot \log x = \lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty.$$

19 ANDAMENTI ASINTOTICI

Al finito: sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

1. Se esiste il limite
$$\lim_{x\to a+} f(x) = L$$
allora diremo che f È ESTENDIBILE CON CONTINUITÀ (da destra) in a: la funzione
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a, b) \\ L & x = a \end{cases}$$
è *continua a destra* in a.

Analogamente si definisce l'estendibilità (da sinistra) in b

Esempi. (a) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è estendibile con continuità (sia da destra che da sinistra) in 0, ovvero la funzione
$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
è *continua* in 0.
(b) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}$ è estendibile con continuità da destra in 0, ma non da sinistra.

2. Se esiste il limite
$$\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$$
allora diremo che la retta verticale $x = a$ è un ASINTOTO VERTICALE per f (analogamente in b)

Esempi. (a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, o $f(x) = -\log|x|$, ha $x = 0$ come asintoto verticale e $f(x) \to +\infty$ per $x \to 0$;
(b) $f(x) = \frac{1}{x}$ ha $x = 0$ come asintoto verticale ma non ne esiste il limite in 0;
(c) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}$ ha $x = 0$ come asintoto verticale, ma solo il limite sinistro è $+\infty$.

3. Se $f : (a, b) \cup (b, c) \to \mathbb{R}$ ed esistono i limiti
$$\lim_{x\to b-} f(x) \neq \lim_{x\to b+} f(x),$$
entrambi in $\mathbb{R}$, allora si dice che b è un PUNTO DI SALTO O PUNTO DI DISCONTINUITÀ per f. Notiamo che in questo caso f è estendibile con continuità in b sia da destra che da sinistra.

Esempi. (a) $f(x) = \operatorname{sign} x$ ha $x = 0$ come punto di salto;
(b) $f(x) = [x]$ ha $x = 0$ come punto di salto;

(c) $f(x) = \arctan(1/x)$ ha $x = 0$ come punto di salto.

All'infinito: $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ (le stesse considerazioni valgono se $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$).

Diciamo che f e g sono ASINTOTICHE (per $x \to +\infty$) se si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = 0.$$

Esempi. (a) $\log(x^3 + \sin x)$ è asintotica a $3 \log x$ per $x \to +\infty$ (ma per esempio $e^{x^3+\sin x}$ **non** è asintotica a e^{x^3}));
(b) $x + \frac{\sin e^x}{x}$ è asintotica a x per $x \to +\infty$ (notare che questa funzione oscilla sempre di piu' quando $x \to +\infty$);
(c) $x + \arctan x$ è asintotica a $x + \pi/2$ per $x \to +\infty$ e a $x - \pi/2$ per $x \to +\infty$.

Il caso in cui g è una costante o una funzione affine è particolarmente semplice, e merita una notazione separata.

Definizione Diremo che la retta $y = L$ è ASINTOTO ORIZZONTALE per f (per $x \to +\infty$) se f è asintotica alla costante L, o, semplicemente

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L.$$

Definizione Sia $m \neq 0$; diremo che la retta $y = mx + q$ è ASINTOTO OBLIQUO per f (per $x \to +\infty$) se f è asintotica alla funzione $g(x) = mx + q$.

Esempio. $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^3 + 7x^2}{x^3 + 1}$ ha come asintoto obliquo $y = x + 2$. Basta fare la divisione tra $x^4 + 2x^3 + 7x^2$ e $x^3 + 1$ per ottenere

$$f(x) = x + 2 + \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1} = x + 2 + o(1)$$

per $x \to \pm\infty$. Analogamente se $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^3 + 7x^2 + x^2 \log x}{x^3 + 1}$. Infatti si ha

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^3 + 7x^2}{x^3 + 1} + \frac{x^2 \log x}{x^3 + 1} = x + 2 + o(1) + o(1) = x + 2 + o(1).$$