40 ESERCIZI SUL CALCOLO DIFFERENZIALE E CONCETTI COLLEGATI

Derivate parziali e piani tangenti

Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico delle funzioni:

$f(x,y) = x^{(y^2)} - \log\Big(\dfrac{x+1}{y+1}\Big)$ nel punto $x = y = 1$

$f(x,y) = y^x + \log\big(\dfrac{y^2}{x}\big)$ nel punto $(1,1)$

$f(x,y) = (2x)^{\sin(xy)} - (\cos(2xy))^y$ nel punto $(1,\pi)$

$f(x,y) = (\cos(x-y))^{\log(x+1)}$ nel punto $x = y = 1$.

$f(x,y) = 3 + (y-1)\log(2e^{x-1} - y)$ in $x = y = 1$

$f(x,y) = (1+2x)^{1+2y}$ in $x = y = 0$

$f(x,y) = e^{ye^x}$ in $x = 0$, $y = 2$

$f(x) = (\cos y + \sin x)^{\cos x}$ in $x = 2\pi$, $y = 0$

Calcolare le derivate parziali di

$f(x,y) = \sin\big(xe^y\big) + \log(\cos(x+y))$

$f(x,y) = x^2 + 2xy + \log(x-3y)$

$f(x,y) = (x-y)^4 - \log(x^2 y)$

$f(x,y) = \sqrt{(y^2-x)(x+y)}$

$f(x,y) = \sqrt{\sin(y^2-x)}$.

Punti di non derivabilità

Dire quali sono e di che tipo i punti di non derivabilità delle seguenti funzioni:

$f(x) = \sqrt{|\log x|}\sqrt{|(x-2)(x-1)|}$

$f(x) = \sqrt{|x^2+x|} - \sqrt{|x^2-x|}$

$f(x) = |\log|x||\Big(\sqrt{|x-1|} + 4x^2\Big)$

$f(x) = |x^2-x|\sqrt{|x|}$

$f(x) = \Big(\sqrt{|x-1|} + |x|\Big)\Big(\sqrt{|x|} + |x-1|\Big)$

$f(x) = \Big(\sqrt{|x|} + |x|\Big)|x-1|$

$f(x) = \sqrt{\Big|\sqrt{|x+1|} - 1\Big|}$

$f(x) = |x^2-x|\sqrt{|x^2-2x|}$

Derivate destra/sinistra

Calcolare derivata destra e sinistra in 0 di

$f(x) = \Big|x\sqrt{|x-4|} - \sin(|x| - 3x)\Big|$

$f(x) = |\sin 2x - \sqrt{2x\sin x - x^2}|$

$f(x) = |\tan(|x| - 7x) + \cos|x||$

$f(x) = |\log(|x| + \sqrt{\cos x^2})\sqrt{|x| - x}|$

$f(x) = |\sqrt{\sin x^2} - \sqrt{\cos x^2}|$

$f(x) = \begin{cases} \big|x^2\sin\big(\frac{1}{x}\big) - \sin(3|x|)\big| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Limiti

Calcolare (se si può usando il teorema dall'Hôpital)

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\log(x^2-x+1)}{\log(3x^2-3x+1)} \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{|\log(2-x)-\log x|}{\arctan(3x-3)}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x^2+\sin x)}{\log(x+3)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 3x}-\log(\cos(2x))-(1+x)^3}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\Big(\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}-2\Big)\log\Big(1+\frac{3}{4}x\Big) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-e^x}{\sqrt{1+x^3}-1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh 2x-\sin 2x}{x-\sin x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cosh 2x-\cos 2x}{\log(\cos x))}$$

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x-4}}{\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+8}} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{7e^{\sin x+x}+12x^2}{3e^x+14x^3}$$

Monotonia

Calcolare gli intervalli di monotonia delle funzioni

$$f(x)=e^{x^3}(x^3+7) \qquad f(x)=(1+|x-3|)e^{-x}$$

$$f(x)=\frac{1}{2x+1}\log x \qquad f(x)=\sqrt{|x|-x}+|1-x|$$

$$f(x)=\Big|\frac{x}{\log 3x}\Big| \qquad f(x)=\frac{1}{|\log x+2|-2}$$

Estremi relativi/punti critici

Trovare gli estremi relativi e i punti critici delle seguenti funzioni

$$f(x)=4x^4-2x^3 \qquad f(x)=\frac{x-6}{x}+\log x^2 \qquad f(x)=\sqrt[3]{x^2}(x-1)$$

$$f(x)=\begin{cases} xe^{2x} & \text{se } x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,0,1\} \\ 0 & \text{se } x\in\{-1,0,1\}\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^4-x^2 & \text{se } x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,0,1\} \\ 0 & \text{se } x\in\{-1,0,1\}\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} |2x-1|-1 & \text{se } x\notin\{-1,0,1\} \\ -x & \text{se } x\in\{-1,0,1\}\end{cases}$$

Convessità, concavità, flessi

Discutere convessità e calcolare i punti di flesso delle seguenti funzioni
$f(x) = x^6 + 2x^5 + x^4 + 3x$
$f(x) = x^6 - x^5 + x^4 + 5x$
$f(x) = \min\{(x-3)^2, (x-1)^2\}$
$f(x) = \min\{5x^2, x^2 + 1\}$
$f(x) = (|x| + 3)e^x$

Dare un esempio di funzione con $f''(0) = 0$ ma per la quale 0 **non è** punto di flesso, e con $y = 1$ asintoto orizzontale a $\pm\infty$.

Provare che se f e g sono convesse allora $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ definisce una funzione convessa (usare la definizione tramite la disuguaglianza di convessità).

Esercizi risolvibili con studi di funzione

Discutere al variare di α il numero di soluzioni di $\alpha x = e^{-2x}$.

Discutere al variare di α il numero di soluzioni di $\log|x| + \alpha x = 0$.

Discutere al variare di α il numero di soluzioni di $x^3 + 2\log|x| = \alpha$.

Tracciare un grafico approssimato della funzione $f(x) = (|x| - 2)e^{-x^2}$. Dire se esistono (senza calcolarli) numeri reali α tali che $f(x) - \alpha x = 0$ ha esattamente una soluzione, giustificando la risposta.

Tracciare un grafico approssimato di $f(x) = (|x| - 3)e^{-|x|}$ (senza studio della convessità).

Dire per quali valori di a l'equazione $2(e^x - 1)^2 = a$ ha una sola soluzione

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ l'equazione $||x| - 3| = \alpha$ ammette esattamente due soluzioni.

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ l'equazione $e^x = 3x + \alpha$ ammette esattamente due soluzioni.

Dire per quali valori di a l'equazione $2x \log x = a$ ha soluzione.

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ l'equazione $(x-3)e^{-x} = \alpha$ ammette esattamente due soluzioni.

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ l'equazione $\dfrac{5e^{-x}}{1 + 6e^{-x}} = \alpha$ ammette soluzioni.

Determinare il numero di soluzioni di $3x^3 - 3x = 1$ giustificando la risposta.

Discutere al variare di a il numero delle soluzioni di $f(x) = a$, dove $f(x) = 2\arctan x - x$.

Discutere al variare di a il numero delle soluzioni di $f(x) = a$ e $|f(x)| = a$, dove $f(x) = \log\left(\frac{1+x^2}{1+x^4}\right)$.

Polinomi di Taylor

Calcolare i polinomi di Taylor di ordine 2 e centro 0 delle seguenti funzioni:

$$f(x) = (1+3x)^{\log(1+2x)} \quad f(x) = \log\left(\frac{\sqrt{1+2x^2}}{e^x - \sin x}\right) \quad f(x) = \log\left(\frac{\sqrt{1+5x^2}}{\sqrt[3]{1+3x^2}}\right)$$

$$f(x) = \sin\Big(e^x - \cos(3x)\Big) \qquad f(x) = \frac{e^{-2x}}{x^2+x+1}$$

Calcolare il polinomio di Taylor di centro 0 e ordine 3 di

$$f(x) = (1+\sin x)^{(\cos x + \sin x)} \qquad f(x) = \sin(\tan x)$$

Calcolare i seguenti limiti usando i polinomi di Taylor:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 3x} - \log(\cos(2x)) - (1+x)^3}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sqrt{1+x^3} - 1}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+3x)^{\log(1+x)} - (1+4x)^{\log(1+x)}}{\cos x - \cos 2x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh 2x - \sin 2x}{x - \sin x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cosh 2x - \cos 2x}{\log(\cos x))}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{4\sin x \log(1+x^2) - 4x^3 + \dfrac{8}{3}x^5}{x^7} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x - \sin 2x + x}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{1-x} - e^x - \dfrac{x^2}{2}}{x^3}$$

Esercizi vari

Provare che se f è pari allora f' è dispari e se f è dispari allora f' è pari. Dedurre che la derivata seconda di una funzione pari è pari e di una funzione dispari è dispari.

Trovare il dominio di $\log(2e^x - x)$

Trovare il dominio di $\log(e^x - x - 1)$

Provare che $f(x) = \arctan x + \log x$ è invertibile nel suo dominio, e calcolare la derivata di f^{-1} in $\pi/4$

Dare un esempio di una funzione f con un punto angoloso in 3, tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Dare un esempio di una funzione f con un punto di cuspide in 3, tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Dare un esempio di una funzione continua e strettamente decrescente con un punto angoloso in $x = 3$ e $f'_-(3) = -2$.

Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ gli estremi relativi della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq a \\ (x-1)^2 & \text{se } x > a \end{cases}$$