Analisi Matematica 2
Esercizi su analisi complessa

A. Braides

Classificazione di punti singolari

1. Trovare le singolarità della seguente funzione e determinarne la loro natura:

$$f(z) = \frac{\sin(z^2+1)}{z^2-1}\,\cos\Big(\frac{1}{z+i}\Big).$$

2. Trovare le singolarità della seguente funzione e determinarne la loro natura:

$$f(z) = \frac{\sin(z^2+1)}{(z^4-1)^2}\,\cos\Big(\frac{2\pi i}{z+i}\Big).$$

3. Trovare le singolarità della seguente funzione e determinarne la loro natura:

$$f(z) = \frac{e^{z^2-1}-1}{(z^4-1)^2}\,\sin\Big(\frac{\pi}{z+1}\Big).$$

4. Trovare le singolarità della seguente funzione e determinarne la loro natura:

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{(z^2+1)^2 z^2}\,e^{\frac{i}{z+i}}.$$

5. Trovare le singolarità della seguente funzione e determinarne la loro natura:

$$f(z) = \frac{\sin\Big(\dfrac{\pi z}{2}\Big)}{(z^2-1)z}\,e^{\frac{2}{z-1}}.$$

6. Trovare le singolarità della seguente funzione e determinarne la loro natura:

$$f(x) = \frac{e^z+e^{-z}-2}{(z^2-4)(z^2+9)}\,e^{\frac{2}{z}}.$$

7. Trovare le singolarità della seguente funzione e determinarne la loro natura:

$$f(x) = \frac{e^{z+2}-e^2}{(z-1)(z^2+4z+5)}\,\sin\Big(\frac{1}{z}\Big).$$

Integrali su circuiti

8. Calcolare l'integrale della funzione f dell'esercizio 2 esteso ad un cerchio orientato positivamente che ha per centro il punto $z = \frac{1}{2}(1+3i)$ e raggio 1.

9. Calcolare l'integrale della funzione f dell'esercizio 3 esteso ad un cerchio orientato positivamente che ha per centro il punto $z = \frac{1}{2}(3+i)$ e raggio 1.

10. Calcolare l'integrale della funzione f dell'esercizio 4 esteso ad un cerchio orientato positivamente che ha per centro il punto $z = i+1$ e raggio 2.

11. Calcolare l'integrale della funzione f dell'esercizio 5 esteso ad un cerchio orientato positivamente che ha per centro il punto $z = i-1$ e raggio 2.

12. Calcolare l'integrale della funzione f dell'esercizio 6 esteso ad un cerchio orientato positivamente che ha per centro il punto $z = 3$ e raggio 2.

13. Calcolare l'integrale della funzione f dell'esercizio 7 esteso ad un cerchio orientato positivamente che ha per centro il punto $z = 3/2$ e raggio 1.

14. (a) Scrivere l'integrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2it}(4+\cos t)}\,dt$ come un integrale sulla circonferenza $z = e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$;
(b) Calcolare l'integrale così trovato usando il teorema dei residui.

15. (a) Scrivere l'integrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{-3it}}{(3+\cos t)^2}\,dt$ come un integrale sulla circonferenza $z = e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$;
(b) Calcolare l'integrale così trovato usando il teorema dei residui.

16. Calcolare $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{4+\sin 2x}dx.$

17. Calcolare $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{2+\sin x}dx.$

18. Sia $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^3 \cos z}$. Calcolare, se possibile, con il teorema dei residui l'integrale $\int_\gamma f(z)\,dz$, rispettivamente nei casi
(a) γ la circonferenza di centro 0 e raggio 1 in senso antiorario
(b) γ la circonferenza di centro 2 e raggio 1 in senso orario

19. Calcolare poli e residui di $f(z) = \dfrac{\cos z}{z(2z-\pi)^3}$. Calcolare, se possibile, con il teorema dei residui l'integrale $\int_\gamma f(z)\,dz$ rispettivamente nei casi
(a) γ la circonferenza di centro 0 e raggio 1 in senso antiorario
(b) γ la circonferenza di centro 2 e raggio 1 in senso orario

20. Calcolare poli e residui di $f(z) = \dfrac{\sin z}{z(z-\pi)^3}$. Calcolare, se possibile, con il teorema dei residui l'integrale $\int_\gamma f(z)\,dz$ rispettivamente nei casi

(a) γ la circonferenza di centro 3 e raggio 2 in senso antiorario

(b) γ la circonferenza di centro i e raggio 2 in senso orario

21. Calcolare poli e residui di $f(z) = \dfrac{\sin z}{z(z-1)^3}$. Calcolare, se possibile, con il teorema dei residui l'integrale $\int_\gamma f(z)\,dz$ rispettivamente nei casi

(a) γ la circonferenza di centro 1 e raggio 1/2 in senso antiorario

(b) γ la circonferenza di centro i e raggio 1 in senso orario

22. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iz}}{(z^3-i)^2}\,dz$, nei due casi in cui γ sia rispettivamente

(a) una parametrizzazione della frontiera di $\{z \in \mathbb{C} : 2|z| < 1\}$ in senso antiorario;

(b) una parametrizzazione della frontiera di $\{z \in \mathbb{C} : 1 - |\mathrm{Re}\, z|^2 > \frac{3}{4}|\mathrm{Im}\, z|\}$ in senso antiorario.

23. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos(i\pi z)e^{i\pi z}}{(z-1)^2}\,dz$, dove γ è una parametrizzazione in senso antiorario di

$\{z \in \mathbb{C} : |z-3| = \beta\}$, nei due casi: (a) $\beta = 1$; (b) $\beta = 5$.

24. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(i\pi z)}{(z^2+4)^2}\,dz$, dove

(a) γ è la circonferenza di centro i e raggio 1/2;

(b) γ è la circonferenza di centro 0 e raggio 3.

Integrali impropri

25. Calcolare i residui della funzione $f(z) = \dfrac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}$. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,dx$.

26. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$ (scrivere $\cos x = \mathrm{Re}\ e^{ix}$)

27. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x(x^2+4)}dx$.

28. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$.

29. (a) Sia $f(z) = \dfrac{z}{z^4+16}$ e sia C_R il quarto della circonferenza di centro 0 e raggio R contenuto nel primo quadrante. Applicando il teorema dei residui a C_R calcolare $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{\partial C_R} f(z)\,dz$ (orientato positivamente);

(b) Usare il punto (a) per calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+16}\,dx$.

Trasformate di Fourier

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione tale che $|f(x)|^2$ sia integrabile in senso improprio. Chiameremo *trasformata di Fourier* di f la funzione $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita da

$$\widehat{f}(\omega) = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)e^{-i\omega x}\,dx.$$

Negli esercizi qui sotto, fissato $\omega \in \mathbb{R}$, al calcolo di $\widehat{f}(\omega)$ si possono applicare i Lemmi di Jordan e il Teorema dei Residui.

30. Sia $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+i)(x^2-4i)}$. Calcolare la trasformata di Fourier $\widehat{f}(\omega)$ di f per $\omega < 0$.

31. Sia $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+4i)(x^2-i)}$. Calcolare la trasformata di Fourier $\widehat{f}(\omega)$ di f per $\omega > 0$.

32. Sia $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+i)}$. Calcolare la trasformata di Fourier $\widehat{f}$ di f.

33. Sia $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+4)(x^2+i)}$. Calcolare la trasformata di Fourier $\widehat{f}$ di f.

34. Sia $f(x) = \dfrac{\sin t}{i+t^3}$. Calcolare la trasformata di Fourier $\widehat{f}(\omega)$ di f per $\omega < -1$. Verificare che $|\widehat{f}|$ è limitata.

(Suggerimento: usare la forma esponenziale per $\sin t$)

35. Sia $f(x) = \dfrac{\cos t}{1+t^2}$. Calcolare la trasformata di Fourier $\widehat{f}(\omega)$ di f per $\omega < -1$.