

## Esercizi

**1.** Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^{2n}}.$$

**R.** La serie può essere riscritta nel modo seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Il numero 2 può essere raccolto fuori dal segno di sommatoria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^{2n}} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Si tratta di una serie geometrica di ragione  $\frac{4}{9}$  con l'indice  $n$  che parte da 1. Dato che  $|\frac{4}{9}| < 1$  la serie è convergente e la somma vale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^{2n}} = 2 \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n - 1 \right) = 2 \cdot \left( \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} - 1 \right) = \frac{8}{5}.$$

\*\*\*

**2.** Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

**R.** La serie è senz'altro convergente perché equivale asintoticamente alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Per determinare la somma osserviamo che

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

e quindi provando a calcolare la somma parziale  $s_N$  abbiamo che

$$s_N = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right).$$

Semplificando tutti i termini opposti rimangono solo il primo e l'ultimo ottenendo così una formula esplicita per la somma parziale

$$s_N = 1 - \frac{1}{N+1}$$

Passando al limite per  $N \rightarrow \infty$  troviamo che la somma della serie data vale 1.

\*\*\*

**3.** Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

**R.** La serie può essere riscritta nel modo seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right).$$

Per il criterio di Leibnitz, non solo possiamo dire che la serie converge, ma possiamo anche applicare la linearità ottenendo la scomposizione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.$$

La prima serie ha somma uguale a  $\log 2$ . La seconda serie può essere ricondotta alla prima “aggiustando” l'indice della sommatoria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + 1 = -\log 2 + 1.$$

Quindi la somma della serie data è uguale a

$$\log 2 + (-\log 2 + 1) = 1.$$

\*\*\*

4. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( n^2 - n^3 \sin \frac{1}{n} \right)^n.$$

**R.** Ricordando che  $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$  per  $x$  che tende a 0:

$$n^2 - n^3 \sin \frac{1}{n} = n^3 \cdot \left( \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right) \sim n^3 \cdot \frac{1}{6n^3} = \frac{1}{6}.$$

Quindi, notando che la serie è a termini non negativi,

$$\sqrt[n]{a_n} = n^2 - n^3 \sin \frac{1}{n} \rightarrow \frac{1}{6}$$

Dato che  $\frac{1}{6} < 1$ , la serie converge per il criterio della radice.

\*\*\*

5. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(\sin n))^n.$$

**R.** Intanto osserviamo che i termini non sono di segno costante (il primo termine negativo si ha per  $n = 5$ ). Notiamo anche che qualunque sia il valore di  $n$

$$\arctan(\sin n) \in \arctan([-1, 1]) = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right),$$

e dunque

$$|\arctan(\sin n)|^n \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^n.$$

Questo vuol dire che la serie dei valori assoluti è maggiorata dalla serie geometrica convergente di ragione  $0 < \frac{\pi}{4} < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n.$$

Dunque, per il criterio del confronto, la serie data converge assolutamente (e quindi è convergente).

\*\*\*

6. Trovare il dominio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x}{x-1} \right)^n$$

e determinarne la somma per  $x = \frac{1}{4}$ .

**R.** Se poniamo  $y = x/(x-1)$  allora, nella variabile  $y$ , la serie diventa una serie geometrica di ragione  $y$ . Questa converge se e solo se  $|y| < 1$  e la somma vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} y^n - 1 = \frac{1}{1-y} - 1 = \frac{y}{1-y}.$$

Quindi il dominio di convergenza della serie data è determinato dalla disuguaglianza

$$\left| \frac{x}{x-1} \right| < 1$$

ossia  $x \in D = (-\infty, \frac{1}{2})$ . Per  $x = \frac{1}{4}$  si ha che  $y = -\frac{1}{3}$  e la somma della serie è uguale a  $-\frac{1}{4}$ .

\*\*\*

7. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - (-2)^n}{6^n}.$$

**R.** La serie data può essere riscritta nel modo seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - (-2)^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3^n}{6^n} - \frac{(-2)^n}{6^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \frac{1}{2} \right)^n - \left( -\frac{1}{3} \right)^n \right)$$

Quindi, per la linearità, la serie può essere decomposta nella differenza di due serie geometriche convergenti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - (-2)^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{3} \right)^n = \left( \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 \right) - \left( \frac{1}{1+\frac{1}{3}} - 1 \right) = \frac{5}{4}.$$

\*\*\*

8. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2 + \log n}{n^a \log(n+1)}}$$

al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$ .

**R.** I termini della serie sono non negativi e facendo un'analisi asintotica abbiamo che

$$\sqrt{\frac{n^2 + \log n}{n^a \log(n+1)}} \sim \left( \frac{n^2}{n^a \log n} \right)^{\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{n^{\frac{a-2}{2}} (\log n)^{\frac{1}{2}}}.$$

La serie data è quindi asintoticamente equivalente a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{a-2}{2}} (\log n)^{\frac{1}{2}}}$$

che converge se e solo se  $\alpha = \frac{a-2}{2} > 1$  ( $\beta = \frac{1}{2} \leq 1$ ). Possiamo così concludere che la serie data converge per  $a > 4$ .

\*\*\*

9. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n^4 + n^3) - 4 \log n}{n^a (\log(n! + n^n))^2}$$

al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$ .

**R.** Intanto osserviamo che

$$\log(n^4 + n^3) - 4 \log n = \log(n^4 + n^3) - \log(n^4) = \log\left(\frac{n^4 + n^3}{n^4}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

La serie data può essere quindi riscritta nel modo seguente:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n^a (\log(n! + n^n))^2}.$$

I termini della serie sono non negativi e possiamo fare un'analisi asintotica ricordando che  $\log(1+x) \sim x$  per  $x$  che tende a 0:

$$\frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n^a (\log(n! + n^n))^2} \sim \frac{\frac{1}{n}}{n^a (n \log n)^2} \sim \frac{1}{n^{a+3} (\log n)^2}.$$

La serie data è quindi asintoticamente equivalente a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{a+3} (\log n)^2}$$

che converge se e solo se  $\alpha = a+3 \geq 1$  ( $\beta = 2 > 1$ ). Possiamo così concludere che la serie data converge per  $a \geq -2$ .

\*\*\*

**10.** Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+3^n)^2 + 5^n}{(1+5^n)^2 + 9^n} \cdot x^n.$$

**R.** Facciamo l'analisi asintotica del coefficiente

$$a_n = \frac{(1+3^n)^2 + 5^n}{(1+5^n)^2 + 9^n} = \frac{(1+2 \cdot 3^n + 9^n) + 5^n}{(1+2 \cdot 5^n + 25^n) + 9^n} \sim \frac{9^n}{25^n}.$$

Quindi il raggio di convergenza è uguale a  $\frac{25}{9}$  perché:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow \frac{9}{25}.$$

\*\*\*

**11.** Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot x^n.$$

**R.** Analizziamo il rapporto dei coefficienti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \sim \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4}.$$

Quindi il raggio di convergenza è uguale a 4.

\*\*\*

**12.** Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2} \cdot x^{4n}.$$

**R.** Poniamo  $y = x^4$ . Allora il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2} \cdot y^n.$$

è dato dal reciproco del limite di

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{\frac{n^2}{n}} = \left( 1 - \frac{2}{n+1} \right)^n \sim \left( 1 - \frac{2}{n} \right)^n \rightarrow e^{-2}$$

ossia  $e^2$ . Siccome  $y = x^4$ , il raggio di convergenza della serie data è

$$\sqrt[4]{e^2} = \sqrt{e}.$$

\*\*\*

**13.** Determinare il dominio della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \cdot \left( \sqrt{\frac{n+1}{n}} - \sqrt{\frac{n}{n+1}} \right) \cdot x^n.$$

**R.** Intanto osserviamo che  $(-1)^{n^2} = (-1)^n$  perché l'intero  $n$  è pari se e solo è pari il suo quadrato (provate a dimostrarlo). Se calcoliamo anche la differenza delle radici, allora la serie data può essere riscritta nel seguente modo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \cdot x^n.$$

Dato che

$$\sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \right|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n(n+1)}} \sim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1,$$

il raggio di convergenza è uguale a 1 e così  $(-1, 1) \subset D \subset [-1, 1]$ . Vediamo cosa succede agli estremi: per  $x = 1$  la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

e quindi converge per il criterio di Leibnitz. Per  $x = -1$  la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \cdot (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

Siccome il termine generico di questa serie a termini positivi è asintoticamente equivalente a  $\frac{1}{n}$  la serie non converge. Dunque  $D = (-1, 1]$

\*\*\*

**14.** Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left( \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n} \right).$$

**R.** Si noti che il termine, a meno del fattore  $(-1)^n$ , è non negativo e infinitesimo, ma non è decrescente dunque non si può applicare il criterio di Leibnitz. Se provassimo ad applicare il confronto asintotico anche a questa serie che ha segno variabile avremmo che

$$\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ora siccome per il criterio di Leibnitz la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

converge allora saremmo tentati di dire che anche la serie data converge. Questa conclusione è però sbagliata perchè in realtà la serie data diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left( \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

infatti la prima serie converge per il criterio di Leibnitz mentre la seconda diverge.

\*\*\*

**15.** Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 4^{n+1}}.$$

**R.** Riscriviamo opportunamente il termine della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 4^{n+1}} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left( \frac{3}{4} \right)^n.$$

Ora dalla tabella delle serie di potenze si ricava facilmente che

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n} \quad \text{con } x \in D = (-1, 1].$$

Quindi la serie in esame si ottiene ponendo  $x = -\frac{3}{4}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 4^{n+1}} = \frac{1}{4} \cdot \left( -\log\left(1 - \frac{3}{4}\right) \right) = \frac{\log 4}{4} = \frac{\log 2}{2}.$$

\*\*\*

**16.** Determinare il dominio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - (-1)^n}{2 + (-1)^n} \cdot x^n.$$

Quanto vale la somma se  $x$  appartiene a tale dominio?

**R.** Si noti che

$$\frac{2 - (-1)^n}{2 + (-1)^n} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 3 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Calcoliamo il limite della successione  $\sqrt[n]{|a_n|}$ : anche se  $a_n$  oscilla tra i valori 3 e  $1/3$  la sua radice  $n$ -sima tende a 1. Inoltre nei punti  $x = 1$  e  $x = -1$  la serie non converge perché il termine generico non è infinitesimo. Quindi  $D = (-1, 1)$ . Se  $|x| < 1$  allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - (-1)^n}{2 + (-1)^n} \cdot x^n = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} + 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1}$$

dove la prima e la seconda serie individuano la somma di tutti i termini rispettivamente di indice pari ( $n = 2k$ ) e di indice dispari ( $n = 2k + 1$ ). Inoltre queste due serie sono riconducibili alla serie geometrica di ragione  $x^2$ : per la prima

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k = \frac{1}{1 - x^2},$$

mentre per la seconda

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1} = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k = \frac{x}{1 - x^2}.$$

Quindi la somma della serie data per  $|x| < 1$  è

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - x^2} + 3 \cdot \frac{x}{1 - x^2} = \frac{1 + 9x}{3(1 - x^2)}.$$

\*\*\*

**17.** Determinare il dominio di convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot (1 - |x|)^n.$$

**R.** Poniamo  $y = 1 - |x|$  e studiamo la serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot y^n.$$

Se analizziamo il coefficiente

$$a_n = \log\left(1 + \frac{2}{n}\right) \sim \frac{2}{n}$$

e quindi il raggio di convergenza è 1 perché

$$\sqrt[n]{|a_n|} \sim \sqrt[n]{\frac{2}{n}} \rightarrow 1.$$

All'estremo  $y = 1$ , la serie è asintoticamente equivalente alla serie armonica e dunque diverge. All'altro estremo  $y = -1$  invece la serie converge per il criterio di Leibnitz perché

$$\log\left(1 + \frac{2}{n}\right) \text{ decresce e tende a } 0.$$

Quindi la serie converge se e solo se

$$-1 \leq y = 1 - |x| < 1, \text{ ossia } 0 < |x| \leq 2$$

e il dominio di convergenza della serie data è  $D = [-2, 2] \setminus \{0\}$ .

\*\*\*