METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2012-13
Terza prova intermedia del 28/6/2013 - Traccia delle soluzioni

1. *Trovare una base ortogonale del sottospazio di $L^2(-\pi,\pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \cos 2t$, $x_2(t) = \cos 3t \cos t$, $x_3(t) = \cos 5t \cos 3t$.*

Scrivendo i coseni in forma esponenziale (o ricordandosi le formule di Werner, per chi ha buona memoria) si ricava

$$x_2(t) = \frac{1}{2}\cos 4t + \frac{1}{2}\cos 2t, \qquad x_3(t) = \frac{1}{2}\cos 8t + \frac{1}{2}\cos 2t.$$

Dunque x_2 è combinazione lineare di x_1 e $\cos 4t$ e x_3 è combinazione lineare di x_1 e $\cos 8t$. Dato che è noto che $\cos 2t$, $\cos 4t$ e $\cos 8t$ sono ortogonali, una basa ortogonale è data da queste tre funzioni.

2. *Sia V il sottospazio di $L^2(-1,1)$ generato da $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$ e $x_3(t) = t^3$.*
Trovare una base ortogonale di V;
calcolare la proiezione di $x(t) = 1 - it^4$ su V;
calcolare la distanza L^2 della funzione $w(t) = i - 1$ da V.

Dato che x_1 è dispari e x_2 è pari, sono ortogonali in $L^2(-1,1)$. Analogamente, x_3 è ortogonale a x_2. Dunque applicando Gram-Schmidt si ottiene la base $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$ e

$$z_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, x_1\rangle}{\|x_1\|^2} \cdot x_1 = t^3 - \frac{3}{5}t.$$

Dato che $\langle t, z_1\rangle = \langle t, z_3\rangle = 0$ la proiezione di 1 è

$$y_1(t) = \frac{\langle 1, t^2\rangle}{\|t^2\|^2} \cdot t^2 = \frac{5}{3}t^2.$$

Analogamente $\langle t^4, z_1\rangle = \langle t^4, z_1\rangle = 0$ e la proiezione di t^4 è

$$y_2(t) = \frac{\langle t^4, t^2\rangle}{\|t^2\|^2} \cdot t^2 = \frac{5}{7}t^2.$$

Dunque per linearità la proiezione di $x(t) = 1 - it^4$ su V è

$$y(t) = y_1(t) - iy_2(t) = \Big(\frac{5}{3} - i\frac{5}{7}\Big)t^2.$$

Dato che $w(t) = (i-1)\cdot 1$, la sua proiezione è $(i-1)$ volte la proiezione di 1, ovvero

$$z(t) = (i-1)y_1 = (i-1)\frac{5}{3}t^2.$$

La distanza di w da V è la norma della differenza $z - w$, ovvero la radice di

$$\|z-w\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |i-1|^2 \left|\frac{5}{3}t^2 - 1\right|^2 dt = |i-1|^2 \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{5}{3}t^2 - 1\right|^2 dt = 4 \int_0^{\pi} \left|\frac{5}{3}t^2 - 1\right|^2 dt$$

(ho usato la parità dell'integrando e il fatto che $|i-1|^2 = 2$. **Attenzione:** non confondere il modulo $|i-1|^2 = 2$ con il prodotto $(i-1)^2 = -2i$. Chi ha fatto questo errore avrebbe dovuto accorgersene perché la distanza è sempre un **numero reale**)

$$= 4 \int_0^{\pi} \Big(\frac{25}{9}t^4 - \frac{10}{3}t^2 + 1\Big)\, dt = 4\Big[\frac{5}{9}t^5 - \frac{10}{9}t^3 + t\Big]_0^1 = \frac{16}{9}.$$

Dunque la distanza è $\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$.

3. *Calcolare la serie di Fourier in* $L^2(-\pi,\pi)$ *di* $f(x) = \sin|2x|$ *in forma trigonometrica. Discuterne la convergenza puntuale e uniforme.*

Dato che la funzione è continua e con derivata limitata (e quindi in L^2) la serie di Fourier converge uniformemente e quindi anche puntualmente a f.

La funzione f è pari, quindi la serie si sviluppa in coseni. Dobbiamo calcolare

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin|2x| \cos kx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x \cos kx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Big(\sin(k+2)x - \sin(k-2)x\Big)\, dx$$

(nell'ultimo passaggio usiamo la forma esponenziale di sin e cos o le formule di Werner). Ci sono due casi:

$k = 2$; allora

$$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 4x\, dx = -\frac{1}{\pi}\Big[\frac{\cos 4x}{4}\Big]_0^{\pi} = 0$$

$k \neq 2$; allora (dato che $\cos(k+2)\pi = \cos(k-2)\pi = \cos k\pi = (-1)^k$

$$a_k = -\frac{1}{\pi}\Big[\frac{\cos(k+2)x}{k+2} - \frac{\cos(k-2)x}{k-2}\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k-2}\Big)(1-(-1)^k)$$

In conclusione, $a_k \neq 0$ solo per $k = 2n+1$ dispari, per i quali

$$a_k = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k-2}\Big) = -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{8}{k^2-4} = -\frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2-4}.$$

La serie di Fourier è quindi

$$\sin|2x| = -\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2-4}\cos((2n+1)x).$$

Nota: un modo alternativo per provarne la convergenza uniforme è notare che la serie di Fourier è totalmente convergente dato che i coefficienti vanno come $1/n^2$ all'infinito.

4. *Scrivere l'identità di Parseval per la funzione al punto* 3. *Verificare la convergenza puntuale nel punto* $x = \pi/2$.

L'identità di Parseval nel nostro caso è

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n+1}|^2 = \|f\|^2,$$

ovvero

$$\frac{64}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{((2n+1)^2 - 4)^2} = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin|2x||^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin 2x|^2 \, dx = \pi.$$

La verifica della convergenza della serie in $x = \pi/2$ è immediata:

$$\sin|2 \cdot \frac{\pi}{2}| = \sin \pi = 0$$

e

$$-\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - 4} \cos((2n+1)\pi/2) = 0$$

poiché $\cos((2n+1)\pi/2 = 0$ per ogni n.

5. *Scrivere la trasformata di Fourier della funzione*

$$f(x) = \frac{e^{i3x}}{x^2 + ix + 2}.$$

Calcoliamo prima la trasformata di

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + ix + 2}.$$

Le due radici del denominatore sono $x = i$ e $x = -2i$, quindi g non si annulla su $\mathbb{R}$. Dato che g tende a zero come $1/x^2$ per $x \to \infty$, si ha $g \in L^1$ e la trasformata di Fourier è intesa in senso L^1.

Usando la caratterizzazione con i residui otteniamo

$$\widehat{g}(\omega) = \begin{cases} -2\pi i \operatorname{Res}(g(z)e^{-i\omega z}, -2i) & \text{se } \omega \geq 0 \\ \\ 2\pi i \operatorname{Res}(g(z)e^{-i\omega z}, i) & \text{se } \omega \leq 0. \end{cases}$$

Si ha

$$\operatorname{Res}(g(z)e^{-i\omega z}, -2i) = \frac{e^{-i\omega z}}{z-i}\Big|_{z=-2i} = \frac{e^{-2\omega}}{-3i}$$

e

$$\operatorname{Res}(g(z)e^{-i\omega z}, i) = \frac{e^{-i\omega z}}{z+2i}\Big|_{z=i} = \frac{e^{\omega}}{3i},$$

quindi

$$\widehat{g}(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{3}\pi\, e^{-2\omega} & \text{se } \omega \geq 0 \\ \\ \frac{2}{3}\pi\, e^{\omega} & \text{se } \omega \leq 0. \end{cases}$$

Usando la formula

$$\mathcal{F}[f(x)](\omega) = \mathcal{F}[g(x)e^{i3x}](\omega) = \mathcal{F}[g(x)](\omega - 3)$$

otteniamo

$$\widehat{f}(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{3}\pi\, e^{-2(\omega-3)} & \text{se } \omega \geq 3 \\ \\ \frac{2}{3}\pi\, e^{\omega-3} & \text{se } \omega \leq 3. \end{cases}$$

Nota: non si può scrivere

$$\frac{1}{x^2+ix+2} = \frac{1}{(x+\frac{i}{2})^2+\frac{9}{4}}$$

e usare la formula per le traslazioni perché $i/2$ non è reale.

6. *Calcolare la trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni temperate di*

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2i}.$$

Possiamo scrivere (divisione di polinomi)

$$f(x) = \frac{x^2-2ix+2ix+4-4}{x-2i} = x+2i-\frac{4}{x-2i}.$$

Si ha

$$\widehat{x} = 2\pi i\delta', \qquad \widehat{2i} = 2i\widehat{1} = 4\pi i\delta,$$

e

$$\mathcal{F}\Big[\frac{1}{x-2i}\Big] = \begin{cases} 2\pi i \operatorname{Res}\Big(\frac{1}{z-2i}\, e^{-i\omega z}, 2i\Big) & \text{se } \omega < 0 \\ \\ 0 & \text{se } \omega > 0 \end{cases} = 2\pi i e^{2\omega}\chi_{(-\infty,0)}(\omega),$$

per cui

$$\widehat{f}(\omega) = 2\pi i\delta' + 4\pi i\delta + 8\pi i e^{2\omega}\chi_{(-\infty,0)}(\omega).$$

Alternativamente, possiamo usare la formula

$$\widehat{f} = -\frac{d^2}{d\omega^2}\mathcal{F}\Big[\frac{1}{x-2i}\Big] = -2\pi i \frac{d^2}{d\omega^2} e^{2\omega}\chi_{(-\infty,0)}(\omega)$$

nel senso delle distribuzioni. Si ha

$$\frac{d}{d\omega} e^{2\omega}\chi_{(-\infty,0)}(\omega) = 2e^{2\omega}\chi_{(-\infty,0)}(\omega) - \delta$$

e quindi

$$\frac{d^2}{d\omega^2} e^{2\omega}\chi_{(-\infty,0)}(\omega) = 4e^{2\omega}\chi_{(-\infty,0)}(\omega) - 2\delta - \delta',$$

da cui il risultato moltiplicando per $-2\pi i$.

Una variante di questo procedimento è scrivere

$$\widehat{f} = -\frac{d^2}{d\omega^2}\mathcal{F}\Big[\frac{1}{x-2i}\Big] = -\frac{d^2}{d\omega^2}\mathcal{F}\Big[\frac{x+2i}{x^2+4}\Big] = -\frac{d^2}{d\omega^2}\Big(\mathcal{F}\Big[\frac{x}{x^2+4}\Big] + 2i\mathcal{F}\Big[\frac{1}{x^2+4}\Big]\Big)$$

$$= -\frac{d^2}{d\omega^2}\Big(i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\Big[\frac{1}{x^2+4}\Big] + 2i\mathcal{F}\Big[\frac{1}{x^2+4}\Big]\Big),$$

e poi derivare nel senso delle distribuzioni tenendo conto che

$$\mathcal{F}\Big[\frac{1}{x^2+4}\Big] = \frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|}.$$