METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2012-13
Seconda prova intermedia del 24/5/2013 - Traccia delle soluzioni

1. *Calcolare la trasformata di Laplace di*

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{(x-t)}\; te^{2t}\, dt$$

La funzione f è la convoluzione dei segnali

$$\sqrt{t} \qquad \text{e} \qquad te^{2t}H(t).$$

La sua trasformata di Laplace è quindi il prodotto di

$$\mathcal{L}[t^{1/2}] = \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$$

e

$$\mathcal{L}[te^{2t}] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[e^{2t}] = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s-2} = \frac{1}{(s-2)^2}$$

(oppure

$$\left.\mathcal{L}[e^{2t}t] = \mathcal{L}[t](s-2) = \frac{1}{(s-2)^2}\right).$$

Dunque

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[t^{1/2}] \cdot \mathcal{L}[te^{2t}] = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}(s-2)^2}.$$

2. *Risolvere usando la trasformata di Laplace*

$$\int_0^x t^{3/2}\, y(x-t)\, dt = x^3.$$

L'integrale è la convoluzione di $y(t)H(t)$ e $t^{3/2}H(t)$ per cui, applicando la trasformata di Laplace ad entrambi i membri si ha

$$\mathcal{L}[y] \cdot \frac{\Gamma(5/2)}{s^{5/2}} = \mathcal{L}[y] \cdot \mathcal{L}[t^{3/2}] = \mathcal{L}[x^3] = \frac{6}{s^4}$$

da cui

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{\Gamma(5/2)}\frac{6}{s^{3/2}} = \frac{6}{\Gamma(3/2)\Gamma(5/2)}\frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} = \frac{6}{\frac{3}{2}\Gamma(3/2)^2}\mathcal{L}[t^{1/2}] = \frac{16}{\pi}\mathcal{L}[t^{1/2}]$$

ovvero $y(t) = \frac{16}{\pi}\sqrt{t}$.

3. *Calcolare l'antitrasformata di Laplace di*

$$F(s) = \frac{1}{s^4 - 16}.$$

Si può usare la formula dell'antitrasformata tramite il calcolo dei residui, o il metodo dei fratti semplici. Con il secondo, si scrive

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^4-16} &= \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{s-2} - \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{s+2} - \frac{1}{16}\cdot\frac{2}{s^2+4} \\ &= \frac{1}{32}\mathcal{L}[e^{2t}] - \frac{1}{32}\mathcal{L}[e^{-2t}] - \frac{1}{16}\mathcal{L}[\sin 2t]\end{aligned}$$

per cui

$$\mathcal{L}^{-1}[F] = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{32} - \frac{\sin 2t}{16} = \frac{1}{16}(\sinh 2t - \sin 2t).$$

4. *Risolvere tramite la trasformata di Laplace*

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = \delta_1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

($\delta_1(x) = \delta(x-1)$ *denota la delta di Dirac in* 1*) verificando che la soluzione soddisfa l'equazione nel senso delle distribuzioni.*

Applicando la trasformata di Laplace tenendo conto delle condizioni iniziali, si ha

$$(s^2 + 2s - 3)\mathcal{L}[y] = e^{-s}$$

da cui

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s-3}\right](t-1).$$

Dato che

$$\frac{1}{s^2+2s-3} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+3}\right) = \frac{1}{4}\mathcal{L}[e^t - e^{-3t}]$$

si ha quindi

$$y(t) = \frac{1}{4}\left(e^{t-1} - e^{-3(t-1)}\right)H(t-1).$$

Verifichiamo che la soluzione soddisfa l'equazione nel senso delle distribuzioni: dato che y è continua in $t = 1$ si ha

$$y'(t) = \frac{1}{4}\Big(e^{t-1} + 3e^{-3(t-1)}\Big)H(t-1).$$

Dato che y' è discontinua in $t = 1$ e $y'(t+) - y'(t-) = 1$, si ha

$$y''(t) = \frac{1}{4}\Big(e^{t-1} - 9e^{-3(t-1)}\Big)H(t-1) + \delta_1,$$

da cui

$$\begin{aligned} y'' + 2y' - 3y &= \frac{1}{4}\Big(e^{t-1} - 9e^{-3(t-1)}\Big)H(t-1) + \delta_1 \\ &\quad + \frac{2}{4}\Big(e^{t-1} + 3e^{-3(t-1)}\Big)H(t-1) - \frac{3}{4}\Big(e^{t-1} - e^{-3(t-1)}\Big)H(t-1) = \delta_1. \end{aligned}$$

5. *Calcolare la derivata prima e seconda nel senso delle distribuzioni di*

$$f(x) = \arctan\Big(\frac{2}{x}\Big).$$

La funzione f è C^1-a-tratti. L'unico punto di discontinuità è 0, dove $f(0+) - f(0-) = \pi$. La derivata quasi-ovunque di f è

$$\frac{1}{1 + (\frac{2}{x})^2} \cdot \Big(-\frac{2}{x^2}\Big) = -\frac{2}{x^2+4}.$$

Dunque

$$f' = \pi\delta - \frac{2}{x^2+4}.$$

La funzione $-\frac{2}{x^2+4}$ è derivabile ovunque, quindi basta calcolarne la derivata puntuale e aggiungerla alla derivata di $\pi\delta$. Il calcolo dà

$$f'' = \pi\delta' + \frac{4x}{(x^2+4)^2}.$$

6. *Calcolare il limite per $h \to +\infty$ nel senso delle distribuzioni delle funzioni*

$$f_h(x) = \min\Big\{\cos(hx), \frac{1}{2}\Big\}, \qquad g_h(x) = h\Big(\delta\Big(x - \frac{2}{h}\Big) - \delta(x)\Big).$$

La prima funzione si scrive come $f_h(x) = \varphi(hx)$, dove

$$\varphi(y) = \min\Big\{\cos(y), \frac{1}{2}\Big\}.$$

è una funzione 2π-periodica. Per il lemma di Riemann-Lebesgue il limite per $h \to +\infty$ nel senso delle distribuzioni di f_h è la costante

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \min\Big\{\cos(y), \frac{1}{2}\Big\}\, dy = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \min\Big\{\cos(y), \frac{1}{2}\Big\}\, dy \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^{\pi/3} \frac{1}{2}\, dy + \int_{\pi/3}^{\pi} \cos y\, dy\Big) = \frac{1}{6} + \frac{1}{\pi}[\sin y]_{\pi/3}^{\pi} \\
&= \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}
\end{aligned}$$

Calcoliamo $\langle g_h, v\rangle$ usando lo sviluppo di Taylor di v in 0:

$$\langle g_h, v\rangle = h\Big(v\Big(\frac{2}{h}\Big) - v(0)\Big) = h\Big(v(0) + \frac{2}{h}v'(0) + o(\frac{1}{h}) - v(0)\Big) = 2v'(0) + o(1).$$

Dunque

$$\lim_{h\to+\infty} \langle g_h, v\rangle = 2v'(0) = -\langle 2\delta', v\rangle,$$

ovvero il limite per $h \to +\infty$ nel senso delle distribuzioni di f_h è $-2\delta'$.