METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2012-13
Appello del 20/2/2014

COGNOME:

NOME:

Barrare la casella: Esame da 9 crediti

Esame da 5 crediti

Risolvere i seguenti esercizi spiegando brevemente il metodo seguito.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.

1. Calcolare la dimensione dello spazio affine delle funzioni $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfano $y^{(V)} - y = 1$ ed esiste finito il limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$.

2. Classificare le singolarità della funzione $f(z) = (z^2 + 1) \sin\left(\frac{i}{z}\pi\right)$.

3. Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(2x - \pi)^2 + 1} dx$ (Suggerimento: fare un cambio di variabili per rendere l'integrando simmetrico)

4. Trovare una soluzione non nulla (se esiste) dell'equazione integro-differenziale

$$\int_0^x u'(x-t)u(t) dt + u(x) = \int_0^x u(x-t)e^{-t} dt \quad \text{con } u(0) = 0.$$

5. Calcolare tramite la trasformata di Laplace la soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = \delta_1, \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

dove $\delta_1(x) = \delta(x - 1)$ è la delta di Dirac in 1.

6. Disegnare un grafico approssimato della funzione y ottenuta nell'esercizio 5 e verificare che y soddisfa l'equazione nel senso delle distribuzioni.

7. Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \cos 2t$, $x_2(t) = \sin 2t$ e $x_3(t) = \sin t \cos t$.

Calcolare la distanza L^2 della funzione $w(t) = ie^{it}$ da V .

8. Sia f la funzione periodica di periodo π e tale che $f(x) = |x(x - \pi)|^{3/4}$ su $[0, \pi]$.

(a) calcolare f' nel senso delle distribuzioni e verificare che $f' \in L^2(-\pi, \pi)$;

(b) dedurre che la serie di Fourier in $L^2(-\pi, \pi)$ di f converge uniformemente.

9. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = xe^{-ix} \cos x$ nel senso delle distribuzioni temperate.

10. Calcolare il limite della successione di funzioni $f_h(x) = x \sin^2(hx)$ per $h \rightarrow +\infty$ nel senso delle distribuzioni.