METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2012-13
Prima prova intermedia del 23/4/2013 - Traccia delle soluzioni

1. *Calcolare* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+1} dx.$

Dato che $\sin x/(x^2+1)$ ha integrale nullo su $\mathbb{R}$ possiamo scrivere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x + i\sin 3x}{x^2+1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3x}}{x^2+1} dx$$

La funzione

$$f(z) = \frac{e^{i3z}}{z^2+1}$$

soddisfa le ipotesi per l'applicazione del Lemma di Jordan del Grande Cerchio nel semipiano $\operatorname{Im} z > 0$. Inoltre ha solo due poli semplici in i e $-i$.

Applicando il teorema dei residui al bordo della semicirconferenza nel semipiano superiore di centro 0 e raggio R con R grande deduciamo quindi che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+1} dx = 2\pi i \operatorname{Res}\Big(\frac{e^{i3z}}{z^2+1}, i\Big).$$

Il calcolo del residuo è immediato,

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{e^{i3z}}{z^2+1}, i\Big) = \frac{e^{i3z}}{z+i}_{|z=i} = \frac{e^{-3}}{2i},$$

per cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+1} dx = \pi e^{-3}$$

2. *Trovare le singolarità della seguente funzione e determinarne la loro natura:*

$$f(z) = \frac{z^3}{(z^2+1)^2} \cos\Big(\frac{\pi}{iz}\Big).$$

Calcolarne l'integrale esteso alla circonferenza di centro $2i$ e raggio $3/2$.

Le singolarità sono in 0, i e $-i$.

In 0 si ha una singolarità essenziale. Infatti per $z = x$ si ha

$$\lim_{x\to 0} x^3 \cos\Big(\frac{\pi}{ix}\Big) = \lim_{x\to 0} x^3 \cosh\Big(\frac{\pi}{x}\Big) = +\infty$$

mentre per $z = iy$

$$\lim_{y\to 0} y^3 \cos\Big(\frac{\pi}{y^2}\Big) = 0.$$

In $\pm i$ si hanno poli di ordine 2. Infatti (per $z = i$)

$$(z-i)^2 \frac{z^3}{(z^2+1)^2} \cos\Big(\frac{\pi}{iz}\Big) = \frac{z^3}{(z+i)^2} \cos\Big(\frac{\pi}{iz}\Big) \to \frac{i}{4}\cos(-\pi) = -\frac{i}{4}.$$

per $z \to i$.

Il calcolo dell'integrale voluto coinvolge solo il polo $z = i$, il cui residuo si ottiene dal calcolo in $z = i$ di

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\frac{z^3}{(z+i)^2}\cos\Big(\frac{\pi}{iz}\Big) &= \frac{z^3}{(z+i)^2}\frac{d}{dz}\cos\Big(\frac{\pi}{iz}\Big) + \cos\Big(\frac{\pi}{iz}\Big)\frac{d}{dz}\frac{z^3}{(z+i)^2} \\ &= \frac{z^3}{(z+i)^2}\sin\Big(\frac{\pi}{iz}\Big)\frac{\pi}{iz^2} + \cos\Big(\frac{\pi}{iz}\Big)\frac{3z^2(z+i)^2 - 2z^3(z+i)}{(z+i)^4}.\end{aligned}$$

Dato che il primo termine contiene il fattore $\sin(-\pi) = 0$, basta calcolare il secondo, che dà $-1/2$. Dunque l'integrale voluto (inteso su un circuito positivo) è $-\pi i$.

Nota: nell'altro compito c'era la funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\sin\Big(\frac{\pi}{iz}\Big)$$

che in $z = \pm i$ ha un polo semplice. Questo si ottiene per esempio calcolando

$$\begin{aligned}\lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z+i)^2}\cdot\frac{\sin\big(\frac{\pi}{iz}\big)}{z-i} &= \frac{1}{4}\lim_{z\to i}\frac{\sin\big(\frac{\pi}{iz}\big) - \sin(-\pi)}{z-i} \\ &= \frac{1}{4}\frac{d}{dz}\sin\Big(\frac{\pi}{iz}\Big)_{|z=i} = -\frac{1}{4}\cos\Big(\frac{\pi}{iz}\Big)\frac{\pi}{iz^2}_{|z=i} = i\frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

o usando lo sviluppo di Taylor al prim'ordine di $\sin\big(\frac{\pi}{iz}\big)$ in $z = i$, ecc. (anche l'Hôpital). Di conseguenza l'integrale si calcola facilmente ed il risultato è $2\pi i \cdot i\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}\pi^2$.

3. *Calcolare usando il teorema dei residui*

$$\int_0^{2\pi} e^{it}\cos t\,dt$$

Con la sostituzione $z = e^{it}$, e quindi

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big),$$

l'integrale diventa l'integrale sulla circonferenza unitaria di

$$\frac{1}{2i}z + \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{z},$$

con un unico polo semplice in 0 con residuo $\frac{1}{2i}$ (direttamente dalla forma di f che è già una serie di Laurent).

Per il teorema dei residui l'integrale vale $2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$.

4. *Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluzione dell'equazione*

$$\begin{cases} y' = y^2 x^3 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

è definita in $x = 1$.

Se $\alpha = 0$ abbiamo la soluzione stazionaria $y = 0$ (che è definita ovunque).

Se $\alpha \neq 0$ possiamo separare le variabili ottenendo

$$\frac{y'}{y^2} = x^3.$$

Integrando tra 0 e t otteniamo

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{y(x)} = \frac{x^4}{4}.$$

ovvero

$$y(x) = \frac{4\alpha}{4 - \alpha x^4}$$

Se $\alpha < 0$ la soluzione è definita per ogni x. Se $\alpha > 0$ l'intervallo massimale di esistenza è

$$\Big(-\sqrt[4]{\frac{4}{\alpha}}, \sqrt[4]{\frac{4}{\alpha}}\Big).$$

Perché esso contenga 1 deve essere $(0 <)\alpha < 4$.

Dunque la condizione cercata è $\alpha < 4$.

5. *Dire qual è la dimensione dello spazio lineare delle soluzioni dell'equazione*

$$y''' + y = 0$$

che verificano $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = 0$.

L'equazione caratteristica è $z^3 + 1 = 0$, che ha le soluzioni

$$-1, \quad \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

La soluzione generale è quindi

$$y(x) = c_1 e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x}\Big(c_2 \cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big) + c_3 \sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big)\Big).$$

La condizione a $-\infty$ è verificata solo se $c_1 = 0$, per cui ci si riduce a

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}x}\Big(c_2 \cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big) + c_3 \sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big)\Big),$$

che dà uno spazio vettoriale di dimensione 2.

6. *Dire per quali valori del parametro α la soluzione $(u(t), v(t))$ del sistema*

$$\begin{cases} u' = 3v - u \\ v' = u + v \\ u(0) = \alpha,\ v(0) = 0 \end{cases}$$

soddisfa $\lim\limits_{t\to-\infty} v(t) = +\infty$.

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 = 4$ con radici ± 2, per cui si cercano soluzioni del tipo

$$u(t) = ae^{2t} + be^{-2t}, \qquad v(t) = Ae^{2t} + Be^{-2t}.$$

Si ha quindi la condizione

$$2ae^{2t} - 2be^{-2t} = u' = 3v - u = 3(Ae^{2t} + Be^{-2t}) - (ae^{2t} + be^{-2t})$$

che dà $a = A$ e $b = -3B$, ovvero

$$u(t) = Ae^{2t} - 3Be^{-2t}, \qquad v(t) = Ae^{2t} + Be^{-2t}.$$

Le condizioni iniziali danno

$$\alpha = A - 3B, \qquad 0 = A + B,$$

da cui

$$A = \frac{\alpha}{4}, \qquad B = -\frac{\alpha}{4}.$$

Dunque

$$v(t) = \frac{\alpha}{4}(e^{2t} - e^{-2t})$$

soddisfa la condizione voluta se e solo se $\alpha > 0$.