

Metodi Matematici per l'Ingegneria

5. Esercizi su distribuzioni

Derivate nel senso delle distribuzioni

Calcolare f' e f'' nel senso delle distribuzioni delle seguenti funzioni (può essere utile disegnare un grafico approssimato di f e f' ove possibile).

1. $f(x) = \chi_{(-\pi/2, \pi/2)}(x) \sin x$.
2. $f(x) = \chi_{(-\frac{\pi}{2}, \pi)}(x) \sin x$.
3. $f(x) = \chi_{(-1, 1)}(x) (x - 1)(x + 4)$.
4. $f(x) = \min\{-1 + |x|, 0\} \chi_{(0, +\infty)}(x)$.
5. $f(x) = \chi_{(-1, 1)}(x) (x^2 - 1)^2$. Di questa calcolare anche f''' .
6. $f(x) = \chi_{(0, \pi)}(x) \cos x$.
7. $f(x) = \chi_{(-1, 1)}(x) (x - 1)(x^2 - 1)$.
8. $f(x) = \min\{-1 + \log(1 + x^2), 0\} \chi_{(0, +\infty)}(x)$.
9. $f(x) = \max\{1 - x^2, 0\} \chi_{(0, 1)}(x)$.
10. $f(x) = \min\{-1 + x^4, 0\} \chi_{(0, +\infty)}(x)$.
11. $f(x) = (x^2 - 1)^2 \chi_{(-1, 1)}(x)$.
12. $f(x) = (x^3 - 3x) \chi_{(-1, 1)}(x)$.

Convergenza nel senso delle distribuzioni

Calcolare il limite di f_h nel senso delle distribuzioni per $h \rightarrow +\infty$ (H = funzione di Heaviside).

13. $f_h(x) = H(x + h) \cos^2(hx)$.
14. $f_h(x) = H(x + h) |\sin(hx)| + \delta_h$.
15. $f_h(x) = h(\delta_{1/h} - \delta_{-1/h}) + \delta_h$.
16. $f_h(x) = h^2(\delta_{1/h^2} - \delta_{-1/h^2}) + h\delta_h$.

17. $f_h(x) = (H(x-h) - H(2h-x))|\cos(hx)|.$

18. $f_h(x) = h^2\delta_h + |\cos(h^2x)|.$

19. $f_h(x) = \left| \sin^2(hx) \cos(hx) \right|.$

20. $f_h(x) = \left| \sin(hx) \cos(hx) \right|.$

21. $f_h(x) = \left| \sin(hx) \cos\left(\frac{x}{h}\right) \right|.$

22. $f_h(x) = \sin(hx) \cos\left(\frac{x}{h}\right).$

23. $f_h(x) = \cos(hx) \sin\left(\frac{x}{h}\right).$

24. $f_h(x) = h \max\{1 - h|x|, 0\}.$

25. $f_h(x) = h^2\chi_{(0,1/h)}(x) - h^2\chi_{(-1/h,0)}(x) + \sin hx$

26. $f_h(x) = \sin(hx)e^{-x^2/h}$. Calcolare il limite anche di f_h^2

27. Dire se le seguenti successioni di funzioni convergono per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$, in $L^1(\mathbb{R})$ o nel senso delle distribuzioni:

$$f_n(x) = \sqrt{n}e^{-nx^2}, \quad g_n(x) = e^{-nx^2}, \quad h_n(x) = e^{-(x-n)^2}.$$

28. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia $f_h(x) = \min\{h|x|, 1\}$.

(a) Calcolare f'_h e f''_h nel senso delle distribuzioni;

(b) Calcolare i limiti di f'_h e f''_h nel senso delle distribuzioni per $h \rightarrow +\infty$.

29. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia $f_h(x) = \chi_{(-\infty, h)}(x) \cos(2\pi hx)$.

(a) Calcolare f'_h e f''_h nel senso delle distribuzioni;

(b) Calcolare il limite di f'_h nel senso delle distribuzioni per $h \rightarrow +\infty$.

30. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia

$$f_h(x) = \begin{cases} \max\{hx + 1, 0\} & \text{se } x \leq 0 \\ -1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Calcolare f'_h e f''_h nel senso delle distribuzioni;

(b) Calcolare il limite di f'_h nel senso delle distribuzioni per $h \rightarrow +\infty$.

31. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia $f_h(x) = \chi_{(-\infty, h)}(x) \sin(2\pi hx)$.

(a) Calcolare f'_h e f''_h nel senso delle distribuzioni;

(b) Calcolare il limite di f'_h nel senso delle distribuzioni per $h \rightarrow +\infty$.

32. Verificare che le soluzioni y degli esercizi da 8 a 14 sulle trasformate di Laplace risolvono le relative equazioni differenziali nel senso delle distribuzioni (ovvero, calcolando y' e y'' nel senso delle distribuzioni le equazioni diventano delle identità)