

Metodi Matematici per l'Ingegneria

4. Esercizi su trasformata di Laplace

Calcolo di trasformate

1. Calcolare la trasformata di Laplace di $f(t) = \int_0^t (t-s)^{10} \cos^2 s \, ds$
2. Calcolare la trasformata di Laplace di $f(t) = \sin t \cos 2t$;
3. Calcolare la trasformata di Laplace di $f(t) = (t \sin t)^2$;
4. Calcolare la trasformata di Laplace di $f(t) = \int_0^t \cos^2(t-s)g(s) \, ds$, dove $g(s) = \max\{1 - |s-1|, 0\}$
5. Calcolare la trasformata di Laplace di $f(t) = \int_0^t (t-s)^{10}(\sin^2 s + s) \, ds$
6. Calcolare la trasformata di Laplace di $f(t) = |t-1|$;
7. Usando la trasformata di Laplace trovare la soluzione y di $\begin{cases} y'' + y = \sin x \\ y(0) = 1, \, y'(0) = 2 \end{cases}$

Equazioni differenziali con secondo membro discontinuo o con delta di Dirac

8. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + y = 1 + \delta(t-1) \\ y(0) = 0, \, y'(0) = 1. \end{cases}$
9. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = H(t-2)e^t \\ y(0) = 1, \, y'(0) = 1. \end{cases}$
10. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 2t + \delta(t-1) \\ y(0) = 1, \, y'(0) = 0. \end{cases}$
11. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + y' - 2y = \delta(t-2) + H(t-2) \\ y(0) = 0, \, y'(0) = 1. \end{cases}$

12. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + y = 3 + 2\delta(t - \pi) \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$

13. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 4y = 2H(t - 2\pi) + \delta(t - \pi) \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases}$

14. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 4y = 2\delta(t - \pi) \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$

Equazioni integro-differenziali

15. Risolvere il seguente problema integro-differenziale mediante la trasformata di Laplace

$$\begin{cases} u'(x) + 5 \int_0^x u(x-t) \cos(2t) dt = 10 \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

16. Risolvere il seguente problema integro-differenziale mediante la trasformata di Laplace

$$\begin{cases} u' + u = -3 \int_0^x u(t) e^{3(x-t)} dt \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

17. Risolvere il seguente problema integro-differenziale mediante la trasformata di Laplace

$$\begin{cases} u'(x) + \int_0^x u(x-t) dt = x^2 \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

18. Risolvere il seguente problema integrale mediante la trasformata di Laplace

$$\begin{cases} \int_0^x y'(t) (x-t)^{3/2} dt = x^4 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

19. Usando la trasformata di Laplace trovare la soluzione y di

$$\begin{cases} y' = 3 \int_0^x e^{2t} y(x-t) dt \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

20. Usando la trasformata di Laplace trovare la soluzione y di

$$\begin{cases} y' = 2 \int_0^x e^{3t} y(x-t) dt \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

21. Risolvere il seguente problema integrale mediante la trasformata di Laplace

$$\int_0^x y(t) (x-t)^{3/2} dt = x^3 - 2x^2.$$

22. Risolvere il seguente problema integrale mediante la trasformata di Laplace

$$\int_0^x y(t) \sqrt{x-t} dt = -x^2.$$

23. Usando la trasformata di Laplace trovare la soluzione y di

$$\begin{cases} y' = \int_0^x e^t y(x-t) dt \\ y(0) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

24. Usando la trasformata di Laplace trovare la soluzione y di

$$\begin{cases} y'' - y = \int_0^x (t-x)e^{2t} dt \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$