Metodi Matematici per l'Ingegneria
3. Esercizi su analisi complessa - II

Integrali impropri

1. Calcolare i residui della funzione $f(z) = \dfrac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 10}$. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2 - 2x + 10}\, dx$.

2. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1}\, dx$ (scrivere $\cos x = \mathrm{Re}\ e^{ix}$)

3. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x(x^2 + 4)} dx$.

4. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$.

5. (a) Sia $f(z) = \dfrac{z}{z^4 + 16}$ e sia C_R il quarto della circonferenza di centro 0 e raggio R contenuto nel primo quadrante. Applicando il teorema dei residui a C_R calcolare $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{\partial C_R} f(z)\, dz$ (orientato positivamente);

(b) Usare il punto (a) per calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4 + 16}\, dx$.

Trasformate di Fourier

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione tale che $|f(x)|^2$ sia integrabile in senso improprio. Chiameremo *trasformata di Fourier* di f la funzione $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita da

$$\widehat{f}(\omega) = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x) e^{-i\omega x}\, dx.$$

Negli esercizi qui sotto, fissato $\omega \in \mathbb{R}$, al calcolo di $\widehat{f}(\omega)$ si possono applicare i Lemmi di Jordan e il Teorema dei Residui.

6. Sia $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + i)(x^2 - 4i)}$. Calcolare la trasformata di Fourier $\widehat{f}(\omega)$ di f per $\omega < 0$.

7. Sia $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+4i)(x^2-i)}$. Calcolare la trasformata di Fourier $\widehat{f}(\omega)$ di f per $\omega > 0$.

8. Sia $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+i)}$. Calcolare la trasformata di Fourier $\widehat{f}$ di f.

9. Sia $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+4)(x^2+i)}$. Calcolare la trasformata di Fourier $\widehat{f}$ di f.

10. Sia $f(x) = \dfrac{\sin t}{i+t^3}$. Calcolare la trasformata di Fourier $\widehat{f}(\omega)$ di f per $\omega < -1$. Verificare che $|\widehat{f}|$ è limitata.

(Suggerimento: usare la forma esponenziale per $\sin t$)

11. Sia $f(x) = \dfrac{\cos t}{1+t^2}$. Calcolare la trasformata di Fourier $\widehat{f}(\omega)$ di f per $\omega < -1$.