Esercizi

3 dicembre 2012

1. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^n}\, dz$ dove $n \in \mathbb{N}$ e $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ parametrizza una circonferenza percorsa in senso antiorario $\gamma(t) = Re^{it}$.

2. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \Big((x^2 + 2y + y\sin(xy))\, dx + (2x + x\sin(xy))dy\Big)$ dove $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, e^t \sin t\pi)$.

3. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \Big(\frac{y + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}\, dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy\Big)$ dove $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sin t, \cos t)$.

4. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, \sin t)$ e $\omega = 2e^{2x} y\, dx + e^{2x}\, dy$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, \sin \pi t)$ e $\omega = 2e^{2x} y\, dx + (e^{2x} + x)\, dy$.

6. Sia $\gamma : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t)$.
Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \Big(\frac{y}{x^2 + y^2}\, dx - \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy\Big)$.

7. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove $\omega = \dfrac{x + 1}{x^2 + y^2} dy - \dfrac{2y}{x^2 + y^2} dx$ e $\gamma : [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t \sin t, \cos^2 t)$.

8. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove $\omega = \dfrac{3y}{x^2 + y^2} dx - \dfrac{2x}{x^2 + y^2} dy$ e $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (-\cos t, \sin t)$.

9. Sia $\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (1 + \cos t, 2 - \sin t)$. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove

$$\omega = \Big(x + 3x^2 \log y\Big)dx + \Big(\frac{x^3}{y} - 1\Big)dy$$

10. Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(t) = (t^2, \sin(\pi t))$. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove

$$\omega = (1 + y^2 - ye^x)dx - (e^x + \sin y - 2xy)dy.$$

11. Determinare e risolvere l'equazione differenziale soddisfatta da una funzione $f(x)$ di modo che la forma differenziale $\omega = f(x)y\,dx + (f(x) + y)\,dy$ sia chiusa. Determinarne quindi un potenziale.

12. Determinare e risolvere l'equazione differenziale soddisfatta da una funzione $f(x)$ di modo che la forma differenziale $\omega = f^2(x)y\,dx + (f^2(x) + y^2)\,dy$ sia chiusa. Scelta una tale f (non nulla) determinarne quindi un potenziale.

13. Determinare e risolvere l'equazione differenziale soddisfatta da una funzione $f(x)$ di modo che la forma differenziale $\omega = x^2y\,dx + (f^2(x) + y)\,dy$ sia chiusa. Scelta una tale f determinarne quindi un potenziale.

14. Sia $\omega = \left(p^2xe^{x^2+y} + \cos(x + y^2)\right) dx + \left(e^{x^2+y} + p^2y\cos(x + y^2)\right) dy.$
Dire per quali valori del parametri p è una forma esatta e calcolarne il potenziale.

15. Mostrare che $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(0) = (0,0)$ e $\gamma(t) = \sqrt{t}\,\sin\left(\frac{\pi}{t}\right)$ se $t > 0$ non è una curva rettificabile.