Traccia di soluzioni della prima prova intermedia

3 dicembre 2012

1. Sia $f(x,y) = (x+1)(y-7)$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -1, y \geq 7, y \leq 12 - x^2\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)(y-7) = 0\}$.

a) *Determinare max/min di f su A*

A è un insieme chiuso e limitato, f è continua, quindi f ammette max e min su A.

Il gradiente di f $\nabla f = (y-7, x+1)$ non si annulla nell'interno di A, quindi non ci sono punti stazionari interni. Dunque max e min si trovano sulla frontiera, che possiamo parametrizzare come due insiemi:

$A \cap B$ (unione di due segmenti), dove la f è identicamente 0;

$\partial A \setminus B = \{(x,y); y = 12 - x^2,\ -1 < x < \sqrt{5}\}$.

Lo studio della funzione f su $\partial A \backslash B$ si riduce allo studio della funzione $g : (-1, \sqrt{5}) \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x, 12 - x^2) = (x+1)(5 - x^2)$, che ha un unico punto stazionario per $x = 1$, per cui $g(1) = f(1, 11) = 8$.

Dunque il minimo di f su A è 0 e il massimo è 8. I punti di minimo di f sono tutti i punti di $A \cap B$, l'unico punto di massimo è $(1, 11)$.

b) *Posto $g_t(x,y) = f(x,y)$ se $(x,y) \notin B$ e $g_t(x,y) = t$ se $(x,y) \in B$ calcolare, se esistono, max/min di g_t su A*

La funzione g_t vale t dove f vale 0 quindi la sua immagine è $(0, 8] \cup \{t\}$. Si ha dunque

- $\min_A g_t = t$, $\max_A g_t = 8$ se $t \leq 0$;
- $\min_A g_t$ non esiste, $\max_A g_t = 8$ se $0 < t \leq 8$;
- $\min_A g_t$ non esiste, $\max_A g_t = t$ se $8 < t$.

c) *Trovare un aperto illimitato U su cui f è limitata.*

Basta prendere $U = \{(x,y) : |f(x,y)| < 1\}$. U è aperto perchè $|f|$ è continua, ed è illimitato perchè contiene B (che è composto da due rette).

2. a) *Dire se $\sum_n \frac{\cos(n^3)n^9}{n^{19}+1}$ converge.*

La serie converge assolutamente per confronto con una serie armonica generalizzata

$$\left|\frac{\cos(n^3)n^9}{n^{19}+1}\right| \leq \frac{n^9}{n^{19}+1} \leq \frac{1}{n^{10}}.$$

b) *Provare che per ogni $t > 0$ esiste $\overline{n}_t$ tale che per $n \geq n_t$ è definita*

$$a_{t,n} = \frac{\frac{1}{3^n+1}}{\frac{1}{2^n+3} - \frac{1}{t2^n+1}}.$$

Dato che

$$a_{t,n} = \frac{(2^n + 3)(t2^n + 1)}{(3^n + 1)((t - 1)2^n - 2)}.$$

Questa quantità è definita se il denominatore non si annulla. Questo è vero sempre se $t \leq 1$ mentre è senz'altro vero per n sufficientemente grande se $t > 1$ poiché $\lim_n((t-1)2^n - 2) = +\infty$.

c) *Dire per quali t la serie* $\displaystyle\sum_{n=\overline{n}_t}^{\infty} a_{t,n}$ *converge.*

Dato che la serie è a termini a segno costante (da un certo n in poi) possiamo usare il confronto asintotico con le serie $\sum_n \frac{2^n}{3^n}$ se $t \neq 1$ e $\sum_n \frac{4^n}{3^n}$ se $t = 1$. Queste sono due serie geometriche (convergente la prima, divergente la seconda). Quindi la serie converge se $t \neq 1$.

3. a) *Determinare $\alpha_n > 0$ tali che* $\displaystyle\sum_n \alpha_n \frac{5^n}{3^n + x^2}$ *converga uniformemente su $\mathbb{R}$.*

Basta trovare tali α_n in modo che converga la serie numerica $\displaystyle\sum_n \alpha_n \left\| \frac{5^n}{3^n + x^2} \right\|$, ovvero la serie $\displaystyle\sum_n \alpha_n \frac{5^n}{3^n}$. Basta prendere $\alpha_n = a^n$ con $a < 3/5$, oppure $\alpha_n = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{3^n}{5^n}$, ecc.

b) *Provare che esiste una successione a_n tale che, posto*

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n^4}{n^5+8} & se\ x \neq a_n \\ 0 & se\ x = a_n, \end{cases}$$

la serie $\sum_n f_n$ converge puntualmente ma non uniformemente.

Sia $b_n = \dfrac{n^4}{n^5 + 8}$. Si ha $b_n \to 0$ ma $\sum_n b_n = +\infty$ (per confronto asintotico con la serie armonica). La somma della serie $f(x)$ è uguale a 0 se $x \notin \{a_n\}$, mentre vale $\sum_{k:a_k=x} b_k$ se $x = a_n$ per qualche n. Si ha convergenza puntuale se $\sum_{k:a_k=x} b_k < +\infty$ per ogni x (ovvero se ci sono solo un numero finito di k tali che $a_k = x$). La convergenza non è uniforme se per infiniti x si ha $\sup\{\sum_{k:a_k=x} b_k : x \in \mathbb{R}\} \geq C > 0$.

Una possibile definizione di a_n è: poniamo $n_0 = 0$ e definiamo per induzione

$$n_{k+1} = \min\{n > n_k : b_{n_k+1} + \cdots + b_n \geq 1\}.$$

Definiamo quindi $a_n = k$ se $n_{k-1} < n \leq n_k$. Allora si ha $f(x) \neq 0$ solo se $x = 1, 2, \ldots$, e in tal caso $f(x) \geq 1$. Viceversa $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ è diversa da 0 solo in un insieme finito di punti e quindi si ha $\|f - s_n\| \geq 1$ per ogni n.