

METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2011-12
Quinto appello del 9/2/2013

Parte I: chi sostiene l'esame da 5 crediti deve risolvere **1 e 1 solo** esercizio dei due proposti

1. (a) Sia $f(z) = \frac{z}{z^4 + 16}$ e sia C_R il quarto della circonferenza di centro 0 e raggio R contenuto nel primo quadrante. Applicando il teorema dei residui a C_R calcolare $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\partial C_R} f(z) dz$ (orientato positivamente);

(b) Usare il punto (a) per calcolare $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4 + 16} dx$.

2. Trovare le singolarità della seguente funzione e determinarne la loro natura:

$$f(z) = \frac{e^{z^2-1} - 1}{(z^4 - 1)^2} \sin\left(\frac{\pi}{z+1}\right).$$

Calcolarne l'integrale esteso ad un cerchio orientato positivamente che ha per centro il punto $z = \frac{1}{2}(3+i)$ e raggio 1.

Parte II: chi sostiene l'esame da 5 crediti deve risolvere **2 e 2 soli** esercizi dei 4 proposti

3. Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \sin t$, $x_2(t) = \cos t$ e $x_3(t) = 1 + 2 \cos t$. Sia $y(t) = t^2$; trovare una base ortogonale di $V_0 = \{x \in V : \langle x, y \rangle = 0\}$.

4. Sia f la funzione 2π -periodica tale che $f(x) = \chi_{(-\pi, 0]}(x) + x\chi_{(0, \pi]}(x)$ in $(-\pi, \pi]$. Disegnare il grafico di f . Determinarne la parte pari e la parte dispari e scriverne le serie di Fourier in forma trigonometrica (si possono usare le serie di Fourier note). Dedurne la serie di Fourier per f e discuterne la convergenza puntuale.

5. (a) Sia $f(x) = \chi_{(-1, 1)}(x)(x^2 - 1)^2$. Calcolare f' , f'' e f''' nel senso delle distribuzioni;

(b) Sia $f_h(x) = h^2(\delta_{1/h^2} - \delta_{-1/h^2}) + h\delta_h$. Calcolare il limite di f_h nel senso delle distribuzioni per $h \rightarrow +\infty$.

6. a) Calcolare la trasformata di Laplace di $f(t) = \int_0^t (t-s)^{10}(\sin^2 s + s) ds$;

b) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + y = 3 + 2\delta(t - \pi) \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$ (δ = delta di Dirac)