

METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2011-12
Quarto appello del 17/9/2012

Parte I: chi sostiene l'esame da 5 crediti deve risolvere **1 e 1 solo** esercizio dei due proposti

1. Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x(x^2 + 4)} dx$.

2. Trovare le singolarità della seguente funzione e determinarne la loro natura:

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{(z^2 + 1)^2 z^2} e^{\frac{i}{z+i}}.$$

Calcolarne l'integrale esteso ad un cerchio orientato positivamente che ha per centro il punto $z = i + 1$ e raggio 2.

Parte II: chi sostiene l'esame da 5 crediti deve risolvere **2 e 2 soli** esercizi dei 4 proposti

3. Sia V il sottospazio di $L^2(-1, 1)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$ e $x_3(t) = t^4$. Trovare una base ortogonale di $V_0 = \{x \in V : \langle x, t^2 \rangle = 0\}$.

4. Sia f la funzione 2π -periodica tale che $f(x) = 2\chi_{(-\pi/2, \pi/2)}(x) - x\chi_{(0, \pi/2)}(x)$ in $(-\pi, \pi]$. Disegnare il grafico di f . Determinarne la parte pari e la parte dispari e scriverne le serie di Fourier in forma trigonometrica. Dedurne la serie di Fourier per f e discuterne la convergenza puntuale.

5. (a) Sia $f(x) = \chi_{(-1, 1)}(x) (x - 1)(x + 4)$. Calcolare f' e f'' nel senso delle distribuzioni;

(b) Sia $f_h(x) = h(\delta_{1/h} - \delta_{-1/h}) + \delta_h$. Calcolare il limite di f_h nel senso delle distribuzioni per $h \rightarrow +\infty$.

6. a) Calcolare la trasformata di Laplace di $f(t) = \int_0^t \cos^2(t - s)g(s) ds$, dove $g(s) = \max\{1 - |s - 1|, 0\}$;

b) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + y' - 2y = \delta(t - 2) + H(t - 2) \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$