

METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2011-12
Terzo appello del 8/9/2012

Parte I: Analisi Complessa

Chi sostiene l'esame da 5 crediti deve risolvere uno e un solo esercizio dei due proposti

1. Calcolare $\int_0^{2\pi} \frac{1}{4 + \sin 2x} dx$.

2. Trovare le singolarità della seguente funzione e determinarne la loro natura:

$$f(z) = \frac{\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{(z^2 - 1)z} e^{\frac{2}{z-1}}.$$

Calcolarne l'integrale esteso ad un cerchio che ha per centro il punto $z = i - 1$ e raggio 2.

Parte II

Chi sostiene l'esame da 5 crediti deve risolvere due e due soli esercizi dei quattro proposti

1. Sia V il sottospazio di $L^2(-1, 1)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = t$, $x_2(t) = 1$ e $x_3(t) = t^3$.
(1) Trovare una base ortogonale di V ;
(2) Calcolare la proiezione della funzione $x(t) = i - t^2$ su V .

2. Sia f la funzione 2π -periodica tale che $f(x) = (x + \frac{\pi}{2})\chi_{(-\pi/2, \pi/2)}(x) - \pi\chi_{(0, \pi/2)}(x)$ in $(-\pi, \pi]$. Disegnare il grafico di f . Scrivere la serie di Fourier di f in forma trigonometrica e discuterne la convergenza puntuale.

3. (a) Sia $f(x) = \chi_{(-\frac{\pi}{2}, \pi)}(x) \sin x$. Calcolare f' e f'' nel senso delle distribuzioni;
(b) Sia $f_h(x) = H(x + h)|\sin(hx)| + \delta_h$. Calcolare il limite di f_h nel senso delle distribuzioni per $h \rightarrow +\infty$. (H = funzione di Heaviside)

4. a) Calcolare la trasformata di Laplace di $f(t) = (t \sin t)^2$;
b) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 2t + \delta(t - 1) \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases}$