METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2011-12

Primo appello del 2/7/2012 - Parte I: Analisi Complessa

Chi sostiene l'esame da 5 crediti deve risolvere uno e un solo esercizio dei due proposti

1. Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$.

2. Trovare le singolarità della seguente funzione e determinarne la loro natura:

$$f(x) = \frac{e^{z+2} - e^2}{(z-1)(z^2 + 4z + 5)} \sin\left(\frac{1}{z}\right).$$

Calcolarne l'integrale esteso ad un cerchio che ha per centro il punto $z = 3/2$ e raggio 1.

Parte II

Chi sostiene l'esame da 5 crediti deve risolvere due e due soli esercizi dei quattro proposti

Risolvere i seguenti esercizi, spiegando il procedimento usato

1. Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \cos t$, $x_2(t) = \cos^2 t$ e $x_3(t) = t$.

(1) Trovare una base ortogonale di V ;

(2) Calcolare la proiezione della funzione $x(t) = i$ su V .

2. Sia f la funzione 2π -periodica tale che $f(x) = 2H(x) - H(x + \frac{\pi}{2}) - H(x - \frac{\pi}{2})$ in $(-\pi, \pi]$ ($H =$ funzione di Heaviside). Scrivere la serie di Fourier di f in forma trigonometrica e la relativa identità di Parseval; discuterne la convergenza puntuale.

3. (a) Sia $f(x) = \chi_{(-\pi/2, \pi/2)}(x) \sin x$. Calcolare f' e f'' nel senso delle distribuzioni;

(b) Sia $f_h(x) = H(x+h) \cos^2(hx)$. Calcolare il limite di f_h nel senso delle distribuzioni per $h \rightarrow +\infty$.

4. a) Calcolare la trasformata di Laplace di $f(t) = \int_0^t (t-s)^{10} \cos^2 s ds$;

b) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + y = 1 + \delta(t-1) \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$ ($\delta =$ delta di Dirac)