

ESERCIZI TRASFORMATA DI LAPLACE (Tarantillo a.a. 2011-12)

Calcolare la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni:

$$f(t) = t \sin^2 t, \quad f(t) = t \cos^2 t, \quad f(t) = t^2 \sin t, \quad f(t) = t^2 \cos t$$

$$f(t) = t^2 \sin^2 t, \quad f(t) = t^2 \cos^2 t, \quad f(t) = t^2 \sinh t, \quad f(t) = t^2 \cosh t$$

$$f(t) = \begin{cases} 2+t & 0 \leq t < 2 \\ 6-t & t \geq 2 \end{cases}, \quad f(t) = \begin{cases} t+1 & t < 3 \\ 4 & 3 \leq t < 4 \\ t & t \geq 4 \end{cases}, \quad f(t) = \begin{cases} 1-t^2 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t < 3 \\ 2(t-3) & t \geq 3 \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t < 2 \\ 1 & 2 \leq t < 3 \\ 0 & t \geq 3 \end{cases}, \quad f(t) = \begin{cases} a-t & 0 \leq t < a \\ 0 & a \leq t < 2a \\ 2a-t & t \geq 2a \end{cases}$$

con $a > 0$ arbitrario.

Calcolare l'anti-trasformata di Laplace delle seguenti funzioni:

$$F(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+5}, \quad F(x) = \frac{x^2+2x}{x^2+4x+5}, \quad F(x) = \frac{3x}{(x-1)(x^2+4x+5)}$$

$$F(x) = \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}, \quad F(x) = \frac{1}{x(x^2+2x+5)^2}, \quad F(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x^2+2x+5)}$$

$$F(x) = \frac{2x-3}{x^2-4}, \quad F(x) = \frac{x}{(x^2-4)^2}, \quad F(x) = \frac{2x-3}{x^2+4}$$

$$F(x) = \frac{x^3}{(x^2+4)^2}, \quad F(x) = \frac{8x^2-4x+12}{x(x^2+4)}, \quad F(x) = \frac{1}{(x^2-4)(x^2+1)^2}$$

$$F(x) = \frac{x+3}{x^2+2x+10}, \quad F(x) = \frac{x^2}{(x^2+2x+10)(x-2)}, \quad F(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x+10)^2}$$

$$G(x) = e^{-cx} F(x) \quad \text{per ogni funzione } F \text{ assegnate sopra.}$$

Notazione: In seguito si utilizza le seguenti notazioni:

$$u_c(t) := H(t-c) = \begin{cases} 1 & t \geq c \\ 0 & t < c \end{cases}$$

• Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

$$① \begin{cases} y'' + 2a y' + (a^2 + 1) y = e^{-at} + \delta(t-2) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

, con $a \in \mathbb{R}$

$$② \begin{cases} y'' - 2y' + 3y = 2u_1(t) + \delta(t-1) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$③ \begin{cases} y'' + 4y = f(t) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

con: $f(t) = \cos^2 t$, $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$, $f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}, \quad f(t) = 2\delta(t - \pi/4).$$

$$④ \begin{cases} y'' + 2y' + y = f(t) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

con $f(t) = u_1(t) + 2t u_3(t) - 6u_4(t)(t-1)$, $f(t) = \sin(t-\pi) u_{\pi}(t)$,

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 3 \\ 4-t & 3 \leq t < 4 \\ 0 & t \geq 4 \end{cases}, \quad f(t) = \delta(t-1) + u_{2\pi}(t).$$

$$⑤ \begin{cases} y'' + 3y' + 2y = f(t) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

con $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 2 \\ -1 & t \geq 2 \end{cases}$, $f(t) = \begin{cases} \cos t & 0 \leq t < \pi \\ -1 & t \geq \pi \end{cases}$;

$f(t) = t - u_2(t)$, $f(t) = t u_1(t)$, $f(t) = u_{\pi}(t) - u_{2\pi}(t)$, $f(t) = \delta(t-\pi)$
 $f(t) = \sin t - \delta(t-\pi)$, $f(t) = u_{\pi}(t) - \delta(t-\pi)$.

4. Calcolare l'anti-trasformata di Laplace delle seguenti funzioni

$$F(x) = \frac{3}{x^2+4}, \quad F(x) = \frac{4}{(x-1)^3}, \quad F(x) = \frac{2}{x^2+3x-4}$$

$$F(x) = \frac{3x}{x^2-x-6}, \quad F(x) = \frac{2x-3}{x^2-4}, \quad F(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+5}$$

$$F(x) = \frac{2x+1}{x^2-2x+2}, \quad F(x) = \frac{8x^2-4x+12}{x(x^2+4)}, \quad F(x) = \frac{1-2x}{x^2+4x+5}$$

$$F(x) = \frac{2x-3}{x^2+2x+10}, \quad F(x) = \frac{e^{-2x}}{x^2+x-2}, \quad F(x) = \frac{2e^{-2x}}{x^2-4}$$

$$F(x) = \frac{e^{-x} + e^{-2x} - e^{-3x} - e^{-4x}}{x}, \quad F(x) = \frac{3!}{(x-2)^4}$$

$$F(x) = \frac{2(x-1)e^{-2x}}{x^2-2x+2}, \quad F(x) = \frac{(x-2)e^{-x}}{x^2-4x+3}$$

5. Tracciare il grafico e calcolare la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni:

- (a) $u_1(t) + 2u_3(t) - 6u_4(t)$
- (b) $(t-3)u_2(t) - (t-2)u_3(t)$
- (c) $f(t-\pi)u_\pi(t)$, where $f(t) = t^2$
- (d) $f(t-3)u_3(t)$, where $f(t) = \sin t$
- (e) $f(t-1)u_2(t)$, where $f(t) = 2t$
- (f) $f(t) = (t-1)u_1(t) - 2(t-2)u_2(t) + (t-3)u_3(t)$

2. Find the Laplace transform of each of the following functions.

- (a) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ (t-2)^2, & t \geq 2 \end{cases}$
- (b) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ t^2 - 2t + 2, & t \geq 1 \end{cases}$
- (c) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ t - \pi, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi \end{cases}$
- (d) $f(t) = u_1(t) + 2u_3(t) - 6u_4(t)$
- (e) $f(t) = (t-3)u_2(t) - (t-2)u_3(t)$
- (f) $f(t) = t - u_1(t)(t-1), \quad t \geq 0$

6. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy tramite l'uso della trasformata di Laplace:

11. $y'' - y' - 6y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$
12. $y'' + 3y' + 2y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
13. $y'' - 2y' + 2y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
14. $y'' - 4y' + 4y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
15. $y'' - 2y' - 2y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$
16. $y'' + 2y' + 5y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$
17. $y^{iv} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 1$
18. $y^{iv} - y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 0$
19. $y^{iv} - 4y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$, $y'''(0) = 0$
20. $y'' + \omega^2 y = \cos 2t$, $\omega^2 \neq 4$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
21. $y'' - 2y' + 2y = \cos t$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
22. $y'' - 2y' + 2y = e^{-t}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
23. $y'' + 2y' + y = 4e^{-t}$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$

1. $y'' + y = f(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \leq t < \infty \end{cases}$
2. $y'' + 2y' + 2y = h(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ $h(t) = \begin{cases} 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & 0 \leq t < \pi \text{ and } t \geq 2\pi \end{cases}$
3. $y'' + 4y = \sin t - u_{2\pi}(t) \sin(t - 2\pi)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
4. $y'' + 4y = \sin t + u_{\pi}(t) \sin(t - \pi)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
5. $y'' + 2y' + y = f(t)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$
6. $y'' + 3y' + 2y = u_2(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
7. $y'' + y = u_{\pi}(t)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
8. $y'' + y' + \frac{1}{2}y = t - u_{\pi/2}(t)(t - \pi/2)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
9. $y'' + y = g(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ $g(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$
10. $y'' + y' + \frac{1}{2}y = g(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ $g(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$
11. $y'' + 4y = u_{\pi}(t) - u_{2\pi}(t)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
12. $y^{iv} - y = u_1(t) - u_2(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$
13. $y^{iv} + 5y'' + 4y = 1 - u_{\pi}(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$
 1. $y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
 2. $y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
 3. $y'' + 2y' + y = \delta(t) + u_{2\pi}(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
 4. $y'' - y = 2\delta(t - 1)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
 5. $y'' + 2y' + 3y = \sin t + \delta(t - \pi)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
 6. $y'' + \omega^2 y = \delta(t - \pi/\omega)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
 7. $y'' + y = \delta(t - \pi) \cos t$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
 8. $y'' + 4y = 2\delta(t - \pi/4)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
 9. $y'' + y = u_{\pi/2}(t) + \delta(t - \pi) - u_{3\pi/2}(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
 10. $y'' + 4y = 4\delta(t - \pi/6) \sin t$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
 11. $y'' + 2y' + 2y = \cos t + \delta(t - \pi/2)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
 12. $y^{iv} - y = \delta(t - 1)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$

8. Determinare l'equazione differenziale soddisfatta da $Y(x) = \mathcal{L}(y(t))$ dove $y = y(t)$ è soluzione del seguente problema di Cauchy:

a.
$$\begin{cases} y'' - t y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{equazione di Airy})$$

b.
$$\begin{cases} (1-t^2) y' - 2t y + \alpha(\alpha+1) y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases} \quad (\text{equazione di Legendre})$$

9. Trovare la trasformata di Laplace per le seguenti funzioni:

a) $f(t) = \int_0^t (t-\tau)^2 \cos 2\tau \, d\tau$, (b) $f(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin \tau \, d\tau$

c) $f(t) = \int_0^t (t-\tau) e^{\tau} \, d\tau$, (d) $f(t) = \int_0^t \sin(t-\tau) \cos \tau \, d\tau$

10. Nei problemi di Cauchy seguenti esprimere la soluzione in termini di un integrale di convoluzione:

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = g(t) \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \sin \alpha t \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4y'' + 4y' + 17y = g(t) \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + y' + \frac{5}{4} y = 1 - u_{\pi}(t) \\ y(0) = 1, y'(0) = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} y'' + 4y' + 4y = g(t) \\ y(0) = 2, y'(0) = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \cos \alpha t \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^{(4)} - y = g(t) \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^{(4)} + 5y'' + 4y = g(t) \\ y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0 \end{cases}$$