ANALISI MATEMATICA II (Braides) 2011/12 - Sesto appello del 17/9/2012

Risolvere i seguenti esercizi, spiegando il procedimento usato

1. Dire se è differenziabile in $(0, 0)$ la funzione $f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^{5/3}|y|^{3/2}}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } x = y = 0. \end{cases}$
2. Trovare i punti di massimo e minimo relativi della funzione $f(x, y) = \sqrt{\sin(y^2 - x)}$. Disegnarli nel piano cartesiano.
3. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ è convessa o concava la funzione $f(x, y, z, w) = \alpha y^2 - x^2 + 2\alpha zw - z^2 - w^2$.
4. Dire per quali valori di α l'insieme $\{(x, y) : (x + 3 - \alpha y)(\alpha x - 3 - 2y) = 0\}$ definisce una curva regolare nell'intorno di ogni suo punto.
5. Dire se l'equazione $(x^2 + y^2)(xe^y - \sin(x^2 - \sin y)) = 0$ definisce implicitamente una funzione $\varphi = \varphi(y)$ in un intorno di $(0, 0)$, e, se tale φ esiste, calcolarne lo sviluppo di Taylor di ordine 1.
6. Disegnare l'insieme $D = \{(x, y) : |x| - y^2 \leq 1\}$. Trovare massimi e minimi assoluti di $f(x, y) = x - y^2$ sulla frontiera di D usando i moltiplicatori di Lagrange ove possibile.
7. Sia $D = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$. Calcolare $\iiint_D (1 + z) dx dy dz$.
8. Trovare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} u' = 2v + 4 \\ v' = -u \\ u(0) = 0 \\ v(0) = 2. \end{cases}$
9. Disegnare il sostegno della curva $\gamma(t) = (u(t), v(t))$, dove u e v sono le soluzioni dell'esercizio 8.
10. Dire per quali valori del parametro α la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y^3 x^2 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$ è definita in $x = 4$.