ANALISI MATEMATICA II (Braides) 2011/12 - Quinto appello del 8/9/2012

Traccia molto schematica delle soluzioni

1. *Dire se è differenziabile in* $(0,0)$ *la funzione* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \textit{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{se } x=y=0 \end{cases}$.

Dato che le derivate parziali sono entrambe nulle, si deve vedere se $f(x,y) = o(|(x,y)|)$, ovvero se è nullo il limite

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Passando in coordinate polari (o considerando la restrizione a $x=y$) si vede che il limite non esiste, e f non è differenziabile.

2. *Disegnare il dominio della funzione* $f(x,y) = \sqrt{(x-y^2)(x+y)}$.

Si divide il piano in quattro regioni tracciando i grafici della parabola $x - y^2 = 0$ e la retta $x - y = 0$. Per determinare quale regione è nel dominio ci si deve ricordare di tenere conto della regola dei segni.

3. *Trovare i punti di massimo e minimo relativi della funzione* $f(x,y) = \sqrt{(y^2-x)(x+y)}$.

Dato che f è una radice (e quindi non negativa), i punti di minimo assoluto sono il bordo del dominio, dove $f(x,y) = 0$. Basta quindi esaminare i punti interni, dove possiamo porre $\nabla f(x,y) = 0$, per cui si ottiene (si semplifica, di poco, il calcolo se si nota che basta cercare i punti stazionari di $g(x,y) = (y^2-x)(x+y)$)

$$\begin{cases} g_x = -(x+y) + (y^2-x) = 0 \\ g_y = 2y(x+y) + (y^2-x) = 0, \end{cases}$$

ovvero (sottraendo la prima equazione alla seconda)

$$\begin{cases} 2x = -y + y^2 \\ 2y(x+y) + (x-y) = (x+y)(2y+1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{8}. \end{cases}$$

Questo punto sta nel dominio di f. Calcolando la matrice Hessiana di g in questo punto, si vede che è definita negativa, ovvero si ha un massimo relativo.

4. *Determinare per quali valori di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *è convessa o concava la funzione* $f(x,y,z) = \alpha y^2 - x^2 + (\alpha^2-1)z^2 + 2y + z$.

Gli autovalori dell'Hessiano di f sono $-2, 2\alpha, 2(\alpha^2-1)$, quindi per essere concordi, devono essere tutti negativi, ovvero

$$\begin{cases} \alpha \leq 0 \\ \alpha^2 - 1 \leq 0. \end{cases}$$

Dunque per $-1 \le \alpha \le 0$ la funzione è concava.

5. *Dire per quali valori di α l'insieme $\{(x,y) : (x+3-\alpha y)(\alpha x - 3 + 2y) = 0\}$ definisce una curva regolare nell'intorno di ogni suo punto.*

Per ogni valore di α l'insieme è costituito da due rette con coefficiente angolare diverso, quindi non definiscono una curva regolare nel punto di intersezione.

6. *Trovare massimi e minimi assoluti di $f(x,y) = (x-1)(y^2-1)$ sul bordo del triangolo di vertici $(1,1)$, $(1,2)$ e $(2,1)$ usando i moltiplicatori di Lagrange ove possibile.*

La funzione è non negativa sul bordo del triangolo, e si annulla sui due cateti. Dunque il minimo è 0. Il massimo è assunto sull'ipotenusa, di equazione $x+y=3$ con $1 < x < 2$. Qui si usano i moltiplicatori di Lagrange. Tralascio i dettagli.

7. *Sia D la piramide in $\mathbb{R}^3$ di vertice $(0,0,4)$ e base l'esagono nel piano xy di centro l'origine e un vertice in $(1,0,0)$. Calcolare $\iiint_D z\,dx\,dy\,dz$.*

Integrando per sezioni l'integrale diventa

$$\int_0^4 m(E_z) z\,dz,$$

dove E_z è la sezione a livello z, che è un esagono nel piano xy centrato in 0 e con un vertice in $(1-(z/4),0)$. La misura $m(E_z)$ vale dunque $\frac{3\sqrt{3}}{2}(1-(z/4))^2$. L'integrale diventa

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}\int_0^4 \left(1-\frac{z}{4}\right)^2 z\,dz.$$

Tralascio il calcolo.

8. *Trovare la soluzione del problema di Cauchy* $\begin{cases} u' = v + t \\ v' = -u \\ u(0) = 1 \\ v(0) = 0 \end{cases}$

Dalla soluzione dell'equazione caratteristica, le soluzione dell'omogeneo associato sono della forma $u(t) = a\cos t + b\sin t$, $v(t) = A\cos t + B\sin t$. Le relazioni tra a, b, A, B si trovano facilmente.

Una soluzione particolare si cerca della forma $u(t) = c + dt$, $v(t) = C + Dt$, ottenendo

$$\begin{cases} d = C + Dt + t \\ D = -c - dt \end{cases} \qquad \begin{cases} c = -D = 1 \\ d = C = 0, \end{cases}$$

ovvero $u(t) = 1$, $v(t) = -t$. Questa soluzione verifica le condizioni iniziali.

9. *Sia* $\gamma : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (u(t), v(t))$, *dove* u *e* v *sono le soluzioni dell'esercizio* 8. *Disegnare il sostegno di* γ.

$\gamma(t) = (1, -t)$ per $t \geq 0$ descrive la semiretta $x = 1$ nel semipiano $y \leq 0$.

10. *Dire per quali valori del parametro* α *la soluzione* $y(x)$ *del problema di Cauchy* $\begin{cases} y' = \dfrac{(y-1)^2}{x} \\ y(1) = \alpha \end{cases}$ *è definita in* $x = e$.

Se $\alpha = 1$ si ha la soluzione stazionaria (definita per $x = e$). Se $\alpha \neq 1$ si integra per separazione di variabili ottenendo

$$y(x) = \frac{\alpha - 1}{1 - (\alpha - 1)\log x}.$$

L'equazione $\log x = \frac{1}{\alpha - 1}$ non deve avere soluzioni in $[0, e]$. Dunque deve essere $x = e^{1/(\alpha-1)} > e$, ovvero

$$\frac{1}{\alpha - 1} > 1.$$

Dunque $\alpha - 1 > 0$ e $\alpha - 1 < 1$, ovvero $1 < \alpha < 2$. Tenendo conto della soluzione stazionaria, la risposta è $1 \leq \alpha < 2$.