ANALISI MATEMATICA II (Braides) 2011/12 - Quinto appello del 8/9/2012

Risolvere i seguenti esercizi, spiegando il procedimento usato

1. Dire se è differenziabile in $(0,0)$ la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } x = y = 0 \end{cases}$.

2. Disegnare il dominio della funzione $f(x,y) = \sqrt{(x-y^2)(x+y)}$.

3. Trovare i punti di massimo e minimo relativi della funzione $f(x,y) = \sqrt{(y^2-x)(x+y)}$.

4. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ è convessa o concava la funzione $f(x,y,z) = \alpha y^2 - x^2 + (\alpha^2-1)z^2 + 2y + z$.

5. Dire per quali valori di α l'insieme $\{(x,y) : (x+3-\alpha y)(\alpha x - 3 + 2y) = 0\}$ definisce una curva regolare nell'intorno di ogni suo punto.

6. Trovare massimi e minimi assoluti di $f(x,y) = (x-1)(y^2-1)$ sul bordo del triangolo di vertici $(1,1)$, $(1,2)$ e $(2,1)$ usando i moltiplicatori di Lagrange ove possibile.

7. Sia D la piramide in $\mathbb{R}^3$ di vertice $(0,0,4)$ e base l'esagono nel piano xy di centro l'origine e un vertice in $(1,0,0)$. Calcolare $\iiint_D z\,dx\,dy\,dz$.

8. Trovare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} u' = v + t \\ v' = -u \\ u(0) = 1 \\ v(0) = 0 \end{cases}$

9. Sia $\gamma : [0,+\infty) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (u(t), v(t))$, dove u e v sono le soluzioni dell'esercizio 8. Disegnare il sostegno di γ.

10. Dire per quali valori del parametro α la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{(y-1)^2}{x} \\ y(1) = \alpha \end{cases}$ è definita in $x = e$.