

Traccia delle soluzioni

1. Calcolare, se esiste, il limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \arctan(xy) - y \log(1+x^2)}{yx^4}$.

Il punto $(0,0)$ è di accumulazione per la funzione in esame, quindi possiamo calcolare il limite. Usando gli sviluppi di Taylor

$$x \arctan(xy) = x(xy + o(x^3y)) = x^2y + o(x^4y)$$

$$y \log(1+x^2) = y\left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\right) = yx^2 - \frac{1}{2}yx^4 + o(yx^4)$$

Dunque

$$\frac{x \arctan(xy) - y \log(1+x^2)}{yx^4} = \frac{\frac{1}{2}yx^4 + o(yx^4)}{yx^4} = \frac{1}{2} + o(1)$$

e il limite è $\frac{1}{2}$.

2. Discutere il dominio e classificare i punti stazionari di $f(x,y) = x \log(y+yx)$.

Il dominio è dato dalla relazione $y(1+x) > 0$ e quindi consta di due quadranti $\{x > -1, y > 0\}$ e $\{x < -1, y < 0\}$.

Il gradiente di f è

$$\left(\log(y+yx) + \frac{x}{1+x}, \frac{x}{y}\right)$$

che si annulla per $x = 0$ e $y = 1$. Le derivate seconde sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{1+x} - \frac{x}{(1+x)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-x}{y^2}$$

Per $x = 0$ e $y = 1$ il determinante della matrice hessiana è -1 e quindi si ha un punto di sella.

3. Determinare gli insiemi dove è convessa o concava $f(x,y,z) = xy - x^2 + y^3 - z^2$.

La matrice hessiana di f è

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

di cui evidentemente -2 è autovalore con autovettore $(0,0,1)$. Quindi questa matrice può essere definita solo negativa. Questo succede quando è definita negativa la matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}.$$

Dato che il primo termine sulla diagonale è negativo, questo succede se e solo se il determinante è positivo, ovvero $-12y - 1 > 0$, ovvero per $y < -1/12$. In questo caso la funzione è concava.

Alternativamente, dato che $f(x, y, z) = g(x, y) - z^2$, dove $g(x, y) = xy - x^2 + y^3$, la funzione non può mai essere convessa (perché $-z^2$ è concava) ed è concava se e solo se lo è g . quindi si conclude come sopra.

4. Calcolare $\int_{\gamma} \left(\frac{y + x^2 + y^2}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right)$ dove $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sin t, \cos t)$.

Possiamo applicare direttamente la definizione:

$$\int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{\cos t}{\sin^2 t + \cos^2 t} + 1 \right) \cos t + \frac{\sin t}{\sin^2 t + \cos^2 t} \sin t \right) dt = \int_0^{2\pi} (1 + \cos t) dt = 2\pi.$$

5. Dire per quali valori di α l'insieme $\{(x, y) : (\alpha x - y^2 - 1)(x^2 + y^2 - \alpha^2) = 0\}$ definisce una curva regolare nell'intorno di ogni suo punto.

Per simmetria possiamo discutere solo il caso $\alpha \geq 0$, dato che se (x, y) appartiene all'insieme per un certo α , allora $(-x, y)$ appartiene all'insieme per $-\alpha$.

Per $\alpha = 0$ l'equazione $\alpha x - y^2 - 1 = 0$ non ha soluzione e $x^2 + y^2 - \alpha^2 = 0$ è un punto, dunque non si ha una curva regolare.

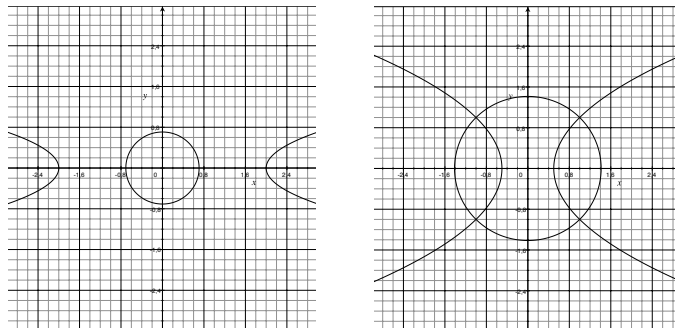


Figura: i casi $|\alpha| < 1$ e $|\alpha| > 1$ (sovrapposti nella stessa figura) rispettivamente

Per $\alpha > 0$ l'equazione $\alpha x - y^2 - 1 = 0$ rappresenta una parabola di vertice $(1/\alpha, 0)$ e $x^2 + y^2 - \alpha^2 = 0$ è una circonferenza di centro 0 e raggio α . L'insieme è regolare se le due curve non si intersecano, ovvero se il vertice della parabola è esterno alla circonferenza, ovvero

$$\frac{1}{\alpha} > \alpha,$$

che dà $\alpha < 1$.

Per $\alpha < 0$ si ha invece la condizione $\alpha > -1$.

In conclusione, la risposta è $|\alpha| < 1$ e $\alpha \neq 0$.

6. Trovare massimi e minimi assoluti di $f(x, y) = x^4y - x^3y^2$ sul triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ usando i moltiplicatori di Lagrange ove possibile.

I punti stazionari liberi di f sono dati da

$$\begin{cases} 4x^3y - 3x^2y^2 = 0 \\ x^4 - 2x^3y = 0. \end{cases}$$

Eventuali punti stazionari interni al triangolo verificano

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x - 2y = 0. \end{cases}$$

Questo sistema ha la sola soluzione $x = y = 0$ quindi non vi sono punti stazionari interni.

Vediamo i punti del bordo. Dato che la funzione è 0 su due lati, basta esaminare il lato tra i punti $(1, 0)$ e $(0, 1)$, di equazione $x + y = 1$ e normale $(1, 1)$. Il sistema è dunque

$$\begin{cases} 4x^3y - 3x^2y^2 = \lambda \\ x^4 - 2x^3y = \lambda \\ x + y = 1, \quad 0 < x, y < 1 \end{cases}$$

da cui

$$4x^3y - 3x^2y^2 = x^4 - 2x^3y$$

e (semplificando per x^2)

$$4xy - 3y^2 = x^2 - 2xy, \quad x^2 - 6xy + 3y^2 = 0.$$

Dunque

$$\begin{cases} x = (3 \pm \sqrt{6})y \\ x + y = 1 \end{cases}$$

da cui si ottengono i due punti cercati.

7. Sia $D = \{(x, y) : (|x| + 1)^2 + (|y| + 1)^2 \leq 5\}$. Disegnare D e calcolare $\iint_D (1 + |y|) dx dy$.

L'insieme è simmetrico rispetto a x e y . Basta disegnarlo nel primo quadrante, dove è la parte del cerchio di centro $(-1, -1)$ e raggio $\sqrt{5}$.

L'integrale è 4 volte l'integrale su $D_+ = D \cap \{x > 0, y > 0\}$, ovvero

$$\begin{aligned} 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{5-(y+1)^2}-1} dx (y+1) dy &= 4 \int_0^1 (\sqrt{5-(y+1)^2}-1)(y+1) dy \\ &= 2 \left[-\frac{2}{3} (5-(y+1)^2)^{3/2} - (y+1)^2 \right]_0^1 = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

8. Trovare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} u' = -v + 2e^{2t} \\ v' = -u + e^{2t} \\ u(0) = 0 \\ v(0) = 1 \end{cases}$$

Troviamo prima tutte le soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{cases} u' = -v \\ v' = -u \end{cases}$$

la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 - 1 = 0$. La soluzione generale è della forma

$$\begin{aligned} u(t) &= c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ v(t) &= -c_1 e^t + c_2 e^{-t} \end{aligned}$$

Si cerca una soluzione del sistema completo della forma

$$\begin{aligned} u(t) &= a e^{2t} \\ v(t) &= b e^{2t}. \end{aligned}$$

Sostituendo nel sistema si ha

$$\begin{cases} 2ae^{2t} = -be^{2t} + 2e^{2t} \\ 2be^{2t} = -ae^{2t} + e^{2t} \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 2a = -b + 2 \\ 2b = -a + 1 \end{cases}$$

che dà $a = 1$, $b = 0$.

La soluzione generale del sistema completo è dunque della forma

$$\begin{aligned} u(t) &= c_1 e^t + c_2 e^{-t} + e^{2t} \\ v(t) &= -c_1 e^t + c_2 e^{-t}. \end{aligned}$$

Dalle condizioni iniziali si ha $c_1 = -1$, $c_2 = 0$ per cui la soluzione del problema di Cauchy è

$$\begin{aligned} u(t) &= -e^t + e^{2t} \\ v(t) &= e^t. \end{aligned}$$

9. Disegnare il sostegno della curva $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ dove u e v sono le soluzioni dell'esercizio 8.

Sostituendo $v = e^t$ (per cui $v > 0$) nella prima equazione si ha $u = -v + v^2$, per cui il grafico è la parte della parabola $u = -v + v^2$ compresa nel semipiano $v > 0$.

10. Dire per quali valori del parametro α la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y^3 x^2 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$ è definita in $x = 1$.

Se $\alpha = 0$ abbiamo la soluzione stazionaria $y(x) = 0$ (che è definita in $x = 1$). Per $\alpha \neq 0$ possiamo risolvere l'equazione separando le variabili:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{1}{y^3} y' dx &= \int_0^t x^2 dx \\ \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{y^2} \right]_{\alpha}^{y(x)} &= \frac{1}{3} x^3 \\ \frac{1}{y(x)^2} &= \frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{3} x^3 = \frac{3 - 2\alpha^2 x^3}{3\alpha^2}. \end{aligned}$$

Perché la funzione y sia definita in $x = 1$ deve essere $3 - 2\alpha^2 > 0$, ovvero $|\alpha| < \sqrt{3/2}$.