ANALISI MATEMATICA II (Braides) 2011-12 - Primo appello del 9/2/2012
Traccia delle soluzioni

1. *Calcolare, se esiste, il limite* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^4} \log\Big(\frac{x^2+x^4+y^4-y^8}{x^2+y^4}\Big)$.

Esaminiamo l'andamento della funzione sugli assi:

• sull'asse delle x (ovvero per $y=0$) si ha

$$\frac{1}{x^2+y^4} \log\Big(\frac{x^2+x^4+y^4-y^8}{x^2+y^4}\Big) = \frac{1}{x^2} \log\Big(\frac{x^2+x^4}{x^2}\Big) = \frac{1}{x^2} \log\Big(1+x^2\Big).$$

Per il limite notevole

$$\lim_{z\to 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1$$

abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \log\Big(1+x^2\Big) = 1$$

• sull'asse delle y (ovvero per $x=0$) si ha

$$\frac{1}{x^2+y^4} \log\Big(\frac{x^2+x^4+y^4-y^8}{x^2+y^4}\Big) = \frac{1}{y^4} \log\Big(\frac{y^4-y^8}{y^4}\Big) = \frac{1}{y^4} \log\Big(1-y^4\Big).$$

che tende a -1 per $y\to 0$.

Dunque sull'asse delle y il limite è -1 mentre sull'asse delle x è 1, quindi non esiste.

2. *Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione* $f(x,y) = (\cos(x-y))^{\log(x+1)}$ *nel punto* $x=y=1$.

Si ha

$$\nabla f = (\cos(x-y))^{\log(x+1)} \Big(\frac{\log\cos(x-y)}{x+1} - \tan(x-y)\log(x+1), \tan(x-y)\log(x+1)\Big),$$

per cui

$$f(1,1) = 1^{\log 2} = 1, \qquad \nabla f(1,1) = (0,0),$$

e quindi il piano tangente è

$$z = 1.$$

3. *Determinare gli insiemi dove è convessa o concava la funzione* $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \arctan\Big(\frac{x}{y}\Big)$.

Si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 1 - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

per cui il determinante della matrice hessiana è

$$\frac{((x^2+y^2)^2-2xy)2xy-(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^4} = \frac{(x^2+y^2)^2(2xy-1)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{(2xy-1)}{(x^2+y^2)^2}.$$

La funzione è convessa se questo determinante è positivo e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \geq 0$, ovvero per

$$2xy \geq 1, xy \geq 0,$$

cioè $2xy \geq 1$. La funzione è concava se questo determinante è positivo e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \leq 0$, ovvero per

$$2xy \geq 1, xy \leq 0,$$

che non è mai verificata.

4. *Calcolare* $\int_\gamma \Big((x^2+2y+y\sin(xy))\,dx+(2x+x\sin(xy))dy\Big)$ *dove* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, e^t \sin t\pi)$.

Un potenziale è dato da

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + 2xy - \cos(xy),$$

per cui l'integrale vale

$$f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(1,0) - f(0,0) = \frac{1}{3}.$$

5. *Dire se l'equazione* $(x^2+y^2)(\cos(x-y)-e^{x-y}) = 0$ *definisce implicitamente una funzione* $\varphi = \varphi(y)$ *in un intorno di* $(0,0)$*, e, se tale* φ *esiste, calcolarne lo sviluppo di Taylor di ordine* 1.

Dato che $f(x,y) = \cos(x-y) - e^{x-y} = 0$ per $x - y = 0$ (e $x^2+y^2 = 0$ solo in questo punto) questa equazione è equivalente alla prima. Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) = (-\sin(x-y) - e^{x-y}, \sin(x-y) + e^{x-y})$$

per cui

$$\nabla f(0,0) = (-1,1),$$

da cui, per il teorema di Dini la φ cercata esiste e, dato che la retta tangente all'insieme delle soluzioni in $(0,0)$ è $y = x$, questo è lo sviluppo cercato.

6. *Trovare massimi e minimi assoluti di* $f(x,y) = ye^{x^2}$ *sulla circonferenza di centro* 0 *e raggio* 1.

Per il teorema di Weierstrass massimo e minimo esistono. Usiamo i moltiplicatori di Lagrange per trovare i punti stazionari (tra i quali cercare massimo e minimo): si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2xye^{x^2} = 2x\lambda \\ e^{x^2} = 2y\lambda \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Una soluzione è $x = 0$, $y = \pm 1$ (e $\lambda = \pm 1/2$). Altrimenti si ha $\lambda = ye^{x^2}$ e, sostituendo,

$$\begin{cases} 1 = 2y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

da cui $x = \pm 1\sqrt{2}$ and $y = \pm 1\sqrt{2}$.

Sostituendo i valori ottenuti:

$$f(0, \pm 1) = \pm 1, \qquad f\Big(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{e}{2}}.$$

Dunque, dato che $e > 2$, massimo e minimo sono $\pm\sqrt{\frac{e}{2}}$.

7. *Sia* $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1,\ y^2 + z^2 \leq 1\}$. *Calcolare* $\iiint_D |y| dx\, dy\, dz$.

Possiamo integrare per fili e usare la parità di $|y|$ e $\sqrt{1 - y^2}$

$$\iiint_D |y| dx\, dy\, dz = \iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} |y| 2\sqrt{1 - y^2} dx\, dy = 2 \iint_{\{x^2+y^2\leq 1, y>0\}} 2y\sqrt{1 - y^2} dx\, dy$$

$$= 2\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\, 2y\sqrt{1 - y^2}\, dy = 4\int_0^1 2y(1 - y^2)\, dy = 2[-(1 - y^2)^2]_0^1 = 2.$$

Si può anche integrare prima in dy:

$$2\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 2y\sqrt{1 - y^2}\, dy\, dx = -\frac{4}{3}\int_{-1}^1 [(1 - y^2)^{3/2}]_0^{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{4}{3}\int_{-1}^1 \Big(\frac{1}{3} - \frac{|x|^3}{3}\Big)\, dx$$

e quindi si conclude (qui bisogna fare attenzione che $(x^2)^{3/2} = |x|^3$ e non x^3).

8. *Trovare la soluzione del problema di Cauchy* $\begin{cases} u' = v + 1 \\ v' = -2u \\ u(0) = 0 \\ v(0) = 1 \end{cases}$.

Possiamo considerare questo come un sistema non omogeneo, oppure cambiare variabili, ponendo $w = v + 1$. In questa variabile abbiamo il sistema omogeneo (uguale all'omogeneo in u e v)

$$\begin{cases} u' = w \\ w' = -2u \\ u(0) = 0 \\ w(0) = 2. \end{cases}$$

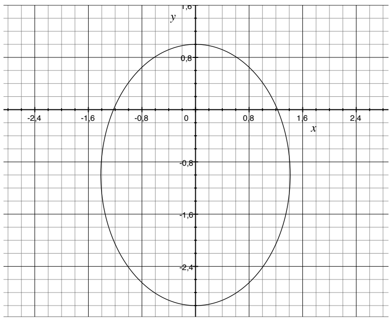
che ha soluzioni della forma $u = a\cos\sqrt{2}t + b\sin\sqrt{2}t$, $w = A\cos\sqrt{2}t + B\sin\sqrt{2}t$. Sostituendo nel sistema abbiamo

$$\begin{cases} -a\sqrt{2} = B \\ b\sqrt{2} = A \\ a = 0 \\ A = 2, \end{cases}$$

ovvero $u = \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t$, $w = 2\cos\sqrt{2}t$, da cui $\begin{cases} u = \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t \\ v = -1 + 2\cos\sqrt{2}t. \end{cases}$

9. *Disegnare il sostegno della curva $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ dove u e v sono le soluzioni dell'esercizio* 8.

Nelle variabili u e w si ha $\frac{u^2}{2} + \frac{w^2}{4} = 1$, ovvero un'ellisse con centro in $(0, 0)$. Nelle variabili u e v si ha $\frac{u^2}{2} + \frac{(v+1)^2}{4} = 1$, ovvero un'ellisse con centro in $(0, -1)$.



10. *Calcolare la dimensione dello spazio affine delle soluzioni di $y^{(4)} - y = 1$ che verificano* $\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = 0$.

L'equazione caratteristica è $z^4 - 1 = 0$ di soluzioni ± 1 e $\pm i$; la soluzione generale dunque è $y(x) = -1 + c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\sin x + c_4\cos x$. La condizione a $+\infty$ dà solo $c_1 = 0$, quindi le soluzioni che verificano la condizione sono

$$y(x) = -1 + c_2e^{-x} + c_3\sin x + c_4\cos x.$$

che è uno spazio affine di dimensione 3.