

METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2010-11
Quarto appello del 21/9/2011

Risolvere i seguenti esercizi, spiegando brevemente il procedimento usato

1. Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \sin 2t$, $x_2(t) = t^2$ e $x_3(t) = t$.

(1) Trovare una base ortogonale di V ;

(2) Calcolare la proiezione della funzione $x(t) = i \cos t - t^4$ su V .

2. Calcolare poli e residui di $f(z) = \frac{\sin z}{z(z - \pi)^3}$. Calcolare, se possibile, con il teorema dei residui l'integrale $\int_{\gamma} f(z) dz$ rispettivamente nei casi

(a) γ la circonferenza di centro 3 e raggio 2 in senso antiorario

(b) γ la circonferenza di centro i e raggio 2 in senso orario

3. Risolvere il seguente problema integrale mediante la trasformata di Laplace

$$\begin{cases} \int_0^x y'(t) (x-t)^{3/2} dt = x^4 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

4. Sia f la funzione periodica di periodo 2π tale che $f(x) = \chi_{(0, \pi]} \cos(x/2)$ in $(-\pi, \pi]$. Discuterne la convergenza puntuale della serie di Fourier, verificandola per $x = 0$.

5. Sia $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 + i)}$. Calcolare la trasformata di Fourier \widehat{f} di f .

6. (a) Sia $f(x) = \min\{-1 + \log(1 + x^2), 0\} \chi_{(0, +\infty)}(x)$. Calcolare f' e f'' nel senso delle distribuzioni;

(b) Sia $f_h(x) = \left| \sin(hx) \cos\left(\frac{x}{h}\right) \right|$. Calcolare il limite di f_h nel senso delle distribuzioni per $h \rightarrow +\infty$.