METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2010-11
Secondo appello del 8/7/2011

Risolvere i seguenti esercizi, spiegando brevemente il procedimento usato

1. Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$ e $x_3(t) = \sin t$.

(1) Trovare una base ortogonale di V ;

(2) Calcolare la proiezione della funzione $x(t) = 1 - i$ su V .

2. (a) Scrivere l'integrale $\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2it}(4 + \cos t)} dt$ come un integrale sulla circonferenza $z = e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$);

(b) Calcolare l'integrale così trovato usando il teorema dei residui.

3. Risolvere il seguente problema integrale mediante la trasformata di Laplace

$$\int_0^x y(t) \sqrt{x-t} dt = -x^2.$$

4. Sia f la funzione periodica di periodo 2π tale che $f(x) = \chi_{(-\pi/2, \pi/2]}(x) \sin x$ in $(-\pi, \pi]$. Scrivere la serie di Fourier di f in forma trigonometrica e discuterne la convergenza puntuale, verificandola per $x = \pi/2$.

5. Sia $f(x) = \frac{\sin t}{i + t^3}$. Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{f}(\omega)$ di f per $\omega < -1$. Verificare che $\hat{f} \in L^\infty(-\infty, -1)$

6. (a) Sia $f(x) = (x^2 - 1)^2 \chi_{(-1,1)}(x)$. Disegnare il grafico di f . Calcolare f' e f'' nel senso delle distribuzioni;

(b) Sia $f_h(x) = \cos(hx) \sin\left(\frac{x}{h}\right)$. Calcolare il limite di f_h nel senso delle distribuzioni per $h \rightarrow +\infty$.