

METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2010-11
Primo appello del 10/6/2011

COGNOME:

NOME:

Risolvere i seguenti esercizi, spiegando il procedimento usato

1. Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \sin t$, $x_2(t) = \sin t \cos t$ e $x_3(t) = \sin^2 t \cos t$.

(1) Trovare una base ortogonale di V ;

(2) Calcolare la proiezione della funzione $x(t) = t - i$ su V .

2. Calcolare i residui nei poli della funzione $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^3 - i)^2}$. Dire se è applicabile il teorema dei residui al calcolo di $\int_{\gamma} f(z) dz$, nei due casi in cui γ sia rispettivamente

(a) una parametrizzazione della frontiera di $\{z \in \mathbb{C} : 2|z| < 1\}$ in senso antiorario;

(b) una parametrizzazione della frontiera di $\{z \in \mathbb{C} : 1 - |\operatorname{Re} z|^2 > |\operatorname{Im} z|\}$ in senso antiorario.

3. Usando la trasformata di Laplace trovare la soluzione y di
$$\begin{cases} y' = \int_0^x e^t y(x-t) dt \\ y(0) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

4. Sia f la funzione periodica di periodo 2π tale che $f(x) = \max\{x + 1, 1\}$ in $(-\pi, \pi]$. Scrivere la serie di Fourier di f , discuterne la convergenza puntuale, verificandola per $x = \pi$.

5. Sia $f(x) = \frac{\cos t}{1 + t^2}$. Calcolare la trasformata di Fourier $\widehat{f}(\omega)$ di f per $\omega < -1$.

(Suggerimento: usare la forma esponenziale per $\cos t$)

6. (a) Sia $f(x) = (x^3 - 3x) \chi_{(-1,1)}(x)$. Calcolare f' e f'' nel senso delle distribuzioni;

(b) Sia $f_h(x) = h \max\{1 - h|x|, 0\}$. Calcolare il limite di f_h nel senso delle distribuzioni per $h \rightarrow +\infty$.