ANALISI MATEMATICA II (Braides) A.A. 2010-11 - Secondo appello del 14/2/2011

Traccia delle soluzioni.

1. *Calcolare la retta tangente all'insieme* $C = \{(x, y) : y^x + \log(\frac{y^2}{x}) = 1\}$ *nel punto* $(1, 1)$.

Sia $f(x, y) = y^x + \log(\frac{y^2}{x}) = e^{x \log y} + 2 \log y - \log x$. Allora l'equazione della retta cercata è

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1) = 0.$$

Dato che

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^x \log y - \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = y^x \frac{x}{y} + \frac{2}{y},$$

si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = -1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 3$$

e la retta cercata è $3y - x - 2 = 0$.

2. *Classificare i punti stazionari di* $f(x, y) = x^2 + 2xy + \log(x - 3y)$.

Dato che f è infinitamente derivabile nel suo dominio $x - 3y > 0$ dobbiamo prima risolvere $\nabla f = 0$, ovvero

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y + \dfrac{1}{x - 3y} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x - \dfrac{3}{x - 3y} = 0 \\ x - 3y > 0 \end{cases} \qquad \text{o anche} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{x - 3y} = -(2x + 2y) \\ 4x + 3y = 0 \\ x - 3y > 0 \end{cases}$$

che dà la soluzione $x = \sqrt{\frac{3}{10}}$, $y = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{10}}$. Le derivate seconde sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - \frac{1}{(x - 3y)^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2 + \frac{3}{(x - 3y)^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{9}{(x - 3y)^2}$$

Dato che l'hessiano è negativo nel punto trovato, si ha un punto di sella.

3. *Calcolare* $\int_\gamma \omega$, *dove* $\omega = \dfrac{3y}{x^2+y^2}dx - \dfrac{2x}{x^2+y^2}dy$ *e* $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (-\cos t, \sin t)$.

Basta applicare la definizione, con $dx = \sin t\, dt$, $dy = \cos t\, dt$ per cui si deve calcolare

$$\int_{-\pi}^{\pi} (3\sin^2 t + 2\cos^2 t)\, dt.$$

Il calcolo si effettua per esempio usando le formule di duplicazione o ricordando che

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2)\, dt = \pi.$$

Il risultato è quindi 5π.

4. *Dire per quali* $\alpha \in \mathbb{R}$ *l'insieme* $\{(x,y) : (x^2 - \alpha y^2)(x^2 - y + \alpha) = 0\}$ *definisce implicitamente una curva regolare nell'intorno di ogni suo punto.*

Dobbiamo esaminare separatamente gli insiemi definiti da

$$x^2 - \alpha y^2 = 0, \qquad x^2 - y + \alpha = 0$$

e quindi la loro unione.

L'insieme $x^2 - y + \alpha = 0$ è una parabola con asse l'asse delle y.

L'insieme $x^2 - \alpha y^2 = 0$ è dato da:

1) due rette trasversali che si incontrano in $(0,0)$ per $\alpha > 0$ (quindi in questo caso già questo insieme non è una curva regolare in $(0,0)$)

2) l'asse delle y per $\alpha = 0$ (che interseca la parabola $y = x^2$ in $(0,0)$ e quindi non è una curva regolare in questo punto)

3) il punto $(0,0)$ per $\alpha < 0$ (che è esterno alla parabola $x^2 - y + \alpha = 0$, e quindi l'insieme non è una curva regolare in $(0,0)$).

Dunque l'insieme in questione non definisce mai una curva regolare nell'intorno di $(0,0)$.

5. *Trovare massimo e minimo assoluti di* $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x + 2y$ *sull'insieme* $\{(x,y) : |x| + |y| \le 1\}$.

Eventuali punti stazionari interni si trovano ponendo $\nabla f = 0$. Questo dà la soluzione $x = y = -1$ che è esterna all'insieme. Dunque massimi e minimi, che esistono per il teorema di Weierstrass, sono sulla frontiera, che è composta dai quattro lati del quadrato di vertici $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$.

Possiamo parametrizzare la frontiera quindi con

(a) I quattro vertici, su cui la funzione assume i valori 3 e -1.

(b) I quattro lati:

(b1) $y = 1-x$, $0 < x < 1$, su cui la funzione diventa $f(x, 1-x) = x^2 + (1-x)^2 + 2x + 2(1-x) = 2x^2 - 2x + 3$, che ha un minimo in $x = 1/2$, che vale $5/2$;

(b2) $y = x-1$, $0 < x < 1$, su cui la funzione diventa $f(x, x-1) = x^2+(x-1)^2+2x+2(x-1) = 2x^2 + 2x - 1$, che non ha punti stazionari;

(b3) $y = 1 + x$, $-1 < x < 0$, su cui la funzione diventa $f(x, 1 + x) = x^2 + (1 + x)^2 + 2x + 2(1 + x) = 2x^2 + 6x + 3$, che non ha punti stazionari;

(b4) $y = -x - 1$, $-1 < x < 0$, su cui la funzione diventa $f(x, -x - 1) = x^2 + (x + 1)^2 + 2x - 2(x + 1) = 2x^2 + 2x - 1$, che ha un minimo in $x = -1/2$, che vale $-3/2$.

In conclusione il minimo è $-3/2$, ottenuto nel punto $(-1/2, -1/2)$, e il massimo è 3, ottenuto nei punti $(0, 1)$ e $(1, 0)$. La stessa conclusione si ottiene facilmente usando i moltiplicatori di Lagrange.

6. *Calcolare* $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$, *dove* $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4,\ x^2 + 2x + y^2 \geq 0\}$.

Il dominio è costituito dai punti esterni alla circonferenza di centro $(-1, 0)$ e raggio 1 e interni alla circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 2. In coordinate polari il domino diventa:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \rho \leq 2, \qquad \text{e} \qquad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi,\ -2\cos\theta \leq \rho \leq 2,$$

per cui l'integrale è

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \rho^2\, d\rho\, d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-2\cos\theta}^2 \rho^2\, d\rho\, d\theta = \frac{8}{3}\pi + \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos^3\theta)\, d\theta.$$

L'ultimo integrale si svolge con la sostituzione $s = \sin\theta$. Tralascio i dettagli.

7. *Calcolare l'area della parte della superficie cilindrica* $x^2 + y^2 = 2x$ *interna alla sfera* $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

La superficie in questione ha come base sul piano xy la circonferenza $x^2 + y^2 = 2x$ e altezza data da $z^2 \leq 4 - x^2 - y^2$ ($= 4 - 2x$ sostituendo l'equazione della circonferenza), ovvero $2\sqrt{4 - 2x}$. Se γ indica una parametrizzazione della circonferenza $x^2+y^2 = 2x$ l'area è quindi

$$\int_\gamma 2\sqrt{4 - 2x}.$$

Una parametrizzazione di γ è

$$x = 1 + \cos\theta, \quad y = \sin\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

per la quale $\|\gamma'\| = 1$ e l'integrale diventa

$$2\int_0^{2\pi} \sqrt{4 - 2(1 - \cos\theta)}\, d\theta = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta.$$

L'integrale si risolve con la sostituzione $\cos\theta = 2\cos^2(\theta/2) - 1$. Tralascio i conti.

8. *Sia f la funzione periodica di periodo 2π tale che* $f(x) = \begin{cases} 2 & \textit{se } -\pi/2 < x \leq \pi/2 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$ *in* $(-\pi, \pi]$*. Scriverne la serie di Fourier per $x = \pi/2$ e verificarne la convergenza calcolandone la somma.*

La funzione è pari. Possiamo scriverne la serie di Fourier nella forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

dove $a_0 = 2$ e

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \cos kt \, dt = \frac{2}{k\pi} \Big[\sin kt\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ \dfrac{4(-1)^h}{k\pi} & \text{se } k = 2h+1. \end{cases}$$

Dunque la serie è

$$1 + \frac{4}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} \cos((2h+1)x).$$

Dato che $\cos((2h+1)\frac{\pi}{2}) = 0$ per ogni h, per $x = \frac{\pi}{2}$ la serie vale 1, che coincide con $\frac{1}{2}(f(\frac{\pi}{2}+) + f(\frac{\pi}{2}-))$.

9. *Calcolare il dominio di convergenza e la somma di* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$.

Dato che la serie di Taylor dell'arcotangente converge per $|x| \leq 1$ (per $x = \pm 1$ si può usare Leibniz) e si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x,$$

la nostra serie converge anch'essa nello stesso dominio e si ha, per $x \neq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{x} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} - x \Big) = \frac{1}{x} \Big(\arctan x - x \Big).$$

Per $x = 0$ la somma della serie è 0.

10. *Dire qual è la dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni di $y^{(4)} - y = 0$ tale che esiste finito il* $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x)$.

Dato che l'equazione caratteristica è $z^4 = 1$, con radici ± 1 e $\pm i$, la soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 \sin x + c_4 \cos x.$$

Perché sia verificata la condizione a $+\infty$ deve essere $c_2 = 0$ (altrimenti il limite è $+\infty$ o $-\infty$), e quindi che $c_3 = c_4 = 0$ (altrimenti la funzione oscilla e non ha limite). Dunque le soluzioni cercate sono $y(x) = c_1 e^{-x}$, che sono uno spazio vettoriale di dimensione 1.