ANALISI MATEMATICA II (Braides) 2010-11 - Primo appello (31/1/2011)

Traccia delle soluzioni

---

1. *Calcolare, se esiste, il limite* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}\log\Big(\frac{x^2+y^2+x^3y}{x^2+y^2}\Big)$.

Dato che $\log(1+s) = s + o(s)$ per $s \to 0$, abbiamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}\log\Big(\frac{x^2+y^2+x^3y}{x^2+y^2}\Big) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}\log\Big(1+\frac{x^3y}{x^2+y^2}\Big)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Il limite è un quoziente di polinomi omogenei dello stesso grado, quindi non esiste. Basta vedelo per le rette $x = 0$ su cui è 0 e $x = y$ su cui è

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{(x^2+x^2)^2} = \frac{1}{4}.$$

2. *Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione* $f(x,y) = x^{(y^2)} - \log\Big(\frac{x+1}{y+1}\Big)$ *nel punto* $x = y = 1$.

Basta usare la formula

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0),$$

con $x_0 = y_0 = 1$.

Si ha (se pi comodo scrivendo $f(x,y) = e^{y^2\log x} - \log(x+1) + \log(y+1)$)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^{(y^2)}\frac{y^2}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^{(y^2)} 2y\log x + \frac{1}{y+1},$$

per cui:

$$f(1,1) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2}$$

e il piano tangente è

$$z = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) = \frac{1}{2}(x+y).$$

3. *Determinare gli insiemi dove è convessa o concava la funzione* $f(x,y) = x\log(xy)$.

La matrice hessiana di f ha determinante $-2/y^2$. Dato che questa quantità è negativa, la matrice hessiana è sempre indefinita e quindi f non è mai concava o convessa.

4. *Sia* $\gamma : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t)$.
Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \Big(\frac{y}{x^2+y^2}\, dx - \frac{x}{x^2+y^2}\, dy \Big)$.

Basta applicare la definizione di integrale di seconda specie, con

$$dx = e^t(\sin t + \cos t)\, dt, \qquad dy = e^t(\cos t - \sin t)\, dt.$$

L'integrale diventa, dopo le semplificazioni algebriche

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos^2 t + \sin^2 t)\, dt = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 1\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

5. *Dire se l'equazione* $\sin(xe^y) + \log(\cos(x+y)) = 0$ *definisce implicitamente una funzione* $\varphi = \varphi(y)$ *in un intorno di* $(0,0)$*, e, se tale* φ *esiste, calcolarne lo sviluppo di Taylor di ordine* 1.

Sia $f(x,y) = \sin(xe^y) + \log(\cos(x+y))$. Una condizione sufficiente affinché $f(x,y) = 0 (= f(0,0))$ definisca implicitamente una funzione della y è che $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq 0$, che è verificata perché

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(xe^y)e^y - \tan(x+y)$$

che vale 1 in $(0,0)$. Lo sviluppo di Taylor di φ è dato da

$$x = x_0 + \varphi'(0)(x - x_0) = \varphi'(0)x.$$

Dato che

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(xe^y)xe^y - \tan(x+y)$$

si ha

$$\varphi'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)} = 0$$

e lo sviluppo cercato è $x = 0$.

6. *Trovare massimi e minimi assoluti di $f(x,y) = ye^x$ sulla circonferenza di centro 0 e raggio 1.*

Possiamo usare i moltiplicatori di Lagrange con $g(x,y) = x^2+y^2-1$. Si ha quindi il sistema

$$\begin{cases} ye^x = \lambda 2x \\ e^x = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Dato che $x = y = 0$ non è soluzione possiamo eliminare λ e ottenere

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x^2 + x - 1 = 0, \end{cases}$$

che dà le soluzioni

$$\begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y = -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, \end{cases}$$

e quindi

$$\min f = -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\, e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, \qquad \max = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\, e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}.$$

(Si potrebbe notare che per il teorema di Weierstrass ci devono essere massimo e minimo, e dato che sia f che g sono regolari questi si possono trovare con i moltiplicatori di Lagrange. Dato che si trovano solo due punti non c'è alcuna discussione ulteriore da fare).

7. Sia $D = \{(x,y) : y^2 \leq |x| \leq 2 + 2|y|\}$. Disegnare D e calcolare

$$\iint_D (|x| + x^2 \sin y)\, dx\, dy.$$

(Suggerimento: disegnare prima D nel quadrante $x \geq 0$, $y \geq 0$. Usare le simmetrie di D e dell'integrando)

Il primo suggerimento consiste nel fatto che D è simmetrico sia rispetto a x che y. Dunque basta disegnarlo nel primo quadrante, dove si riduce alla condizione

$$y^2 \leq x \leq 2 + 2y$$

che è soddisfatta per $0 \leq y \leq 1+\sqrt{3}$ (o $0 \leq x \leq 4+2\sqrt{3}$).

Il secondo suggerimento ci dice che, dato che la funzione $\sin y$ è dispari, l'integrando è antisimmetrico rispetto all'asse x e quindi il suo integrale è nullo. Dato che $|x|$ è simmetrica sia rispetto all'asse x che quello delle y, l'integrale diventa D^+ sia l'intersezione di D con il primo quadrante)

$$4\iint_{D^+} (|x| + x^2 \sin y) dx\, dy = \int_0^{1+\sqrt{3}} \Big(\int_{y^2}^{2+2y} x\, dx\Big) dy\,.$$

Questo integrale si calcola facilmente. Non includo i conti.

8. *Calcolare la serie di Fourier della funzione 2π-periodica definita in $[-\pi, \pi]$ da*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{se } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione non è né pari né dispari, ed ha quindi una serie di Fourier completa del tipo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt.$$

Dobbiamo quindi calcolare tutti i coefficienti, che sono

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} 1\, dt = \frac{1}{2},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos kt\, dt = \frac{1}{k\pi}\Big[\sin kt\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{k\pi}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin kt\, dt = -\frac{1}{k\pi}\Big[\cos kt\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1-\cos k\frac{\pi}{2}}{k\pi}\,.$$

I coefficienti si possono meglio scrivere come

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 2h (\neq 0) \\ \dfrac{\sin(2h+1)\frac{\pi}{2}}{k\pi} = (-1)^h \dfrac{1}{(2h+1)\pi} & \text{se } k = 2h+1 \end{cases}$$

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 4h \\ \dfrac{1}{(4h+1)\pi} & \text{se } k = 4h+1 \\ \dfrac{1}{(2h+1)\pi} & \text{se } k = 4h+2 \\ \dfrac{1}{(4h+3)\pi} & \text{se } k = 4h+3 \end{cases}$$

9. *Calcolare dominio di convergenza e la somma della serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{2n-1}}{9^n}$

Per quanto riguarda il raggio di convergenza, trascurando il termine polinomiale n, è lo stesso di $\sum_n \frac{x^{2n}}{9^n}$ che è una serie geometriva di ragione $x^2/9$ che converge per $x^2/9 < 1$, ovvero per

$$-3 < x < 3.$$

Inserendo $x = \pm 3$ nella serie si ha

$$\pm \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3},$$

che diverge.

Per calcolare la somma, scriviamo (invertendo sommatoria e derivazione)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{2n-1}}{9^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^{2n}}{9^n} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{9}\right)^n = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{9}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \frac{9}{9 - x^2} = \frac{9x}{(9 - x^2)^2}.$$

10. *Trovare l'integrale generale dell'equazione* $y'' + 3y' + 2y = e^x + 4$.

Dato che $z^2 + 3z + 2 = (z+2)(z+1)$ ha radici -2 e -1 l'integrale generale dell'omogenea associata è

$$c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}.$$

Una soluzione particolare si cerca del tipo $ae^x + b$. Inserendo questa forma nell'equazione si ottiene $a = \frac{1}{6}$ e $b = 2$. Dunque l'integrale generale è

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{6} e^x + 2.$$