

Risolvere i seguenti esercizi, spiegando il procedimento usato

1. Calcolare, se esiste, il limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} \log\left(\frac{x^2 + y^2 + x^3 y}{x^2 + y^2}\right)$.
2. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = x^{(y^2)} - \log\left(\frac{x+1}{y+1}\right)$ nel punto $x = y = 1$.
3. Determinare gli insiemi dove è convessa o concava la funzione $f(x, y) = x \log(xy)$.
4. Sia $\gamma : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t)$.
Calcolare $\int_{\gamma} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right)$.
5. Dire se l'equazione $\sin(xe^y) + \log(\cos(x+y)) = 0$ definisce implicitamente una funzione $\varphi = \varphi(y)$ in un intorno di $(0, 0)$, e, se tale φ esiste, calcolarne lo sviluppo di Taylor di ordine 1.
6. Trovare massimi e minimi assoluti di $f(x, y) = ye^x$ sulla circonferenza di centro 0 e raggio 1.
7. Sia $D = \{(x, y) : y^2 \leq |x| \leq 2 + 2|y|\}$. Disegnare D e calcolare $\iint_D (|x| + x^2 \sin y) dx dy$.
(Suggerimento: disegnare prima D nel quadrante $x \geq 0, y \geq 0$. Usare le simmetrie di D e dell'integrando)
8. Calcolare la serie di Fourier della funzione 2π -periodica definita in $[-\pi, \pi]$ da
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
9. Calcolare dominio di convergenza e la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{2n-1}}{9^n}$
(suggerimento: usare il teorema di integrazione per serie).
10. Trovare l'integrale generale dell'equazione $y'' + 3y' + 2y = e^x + 4$.