METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2009-10
Sesto appello del 14/2/2011

Risolvere i seguenti esercizi, spiegando il procedimento usato

1. Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi,\pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = \cos^2 t$, $x_2(t) = 1$ e $x_3(t) = \sin^2 t$.

(1) Trovare una base ortogonale di V;

(2) Calcolare la proiezione della funzione $x(t) = t$ su V.

2. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos(i\pi z)e^{i\pi z}}{(z-1)^2}\,dz$, dove γ è una parametrizzazione in senso antiorario di

$\{z \in \mathbb{C} : |z-3| = \beta\}$, nei due casi: (a) $\beta = 1$; (b) $\beta = 5$.

3. Usando la trasformata di Laplace trovare la soluzione y di $\begin{cases} y'' - y = \displaystyle\int_0^x (t-x)e^{2t}\,dt \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases}$

4. Sia f la funzione periodica di periodo 2π tale che $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } -\pi/2 < x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ in $(-\pi,\pi]$.

Scrivere la serie di Fourier di f e discuterne la convergenza puntuale.

Verificare tale convergenza per $x = \pi/2$ e $x = 0$ calcolandone la somma.

5. (a) Scrivere l'integrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{-3it}}{(3+\cos t)^2}\,dt$ come un integrale sulla circonferenza $z = e^{it}$ $(t \in [0,2\pi])$;

(b) Calcolare l'integrale così trovato usando il teorema dei residui.

6. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia $f_h(x) = \chi_{(-\infty,h)}(x)\sin(2\pi hx)$.

(a) Calcolare f_h' e f_h'' nel senso delle distribuzioni;

(b) Calcolare il limite di f_h' nel senso delle distribuzioni per $h \to +\infty$.