METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2009-10
Quarto appello del 24/9/2010

Qui trovate le tracce delle soluzioni degli esercizi del compito. Ho tralasciato i calcoli che non hanno dato grandi problemi, che comunque sono parte della risoluzione richiesta, concentrandomi invece sul procedimento da usare.

1. *Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi,\pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = e^{it}$, $x_2(t) = e^{-it}$ e $x_3(t) = \cos t$.*

(1) *Trovare una base ortogonale di V;*

(2) *Calcolare la proiezione della funzione $x(t) = e^t$ su V.*

(1) Dato che $\cos t$ è combinazione lineare di e^{it} e e^{-it}, queste due funzioni genarano V. Dato che sono ortogonali tra loro, esse dunque sono una base ortogonale.

(2) La proiezione si calcola in modo standard usando il teorema delle proiezioni.

2. (1) *Per ogni $k \in \mathbb{N}$ calcolare il residuo di $f_k(z) = \dfrac{\sin z}{z^k}$ in 0;*

(2) *calcolare il residuo di $f(z) = e^{1/z^2} \sin z$ in 0.*
(suggerimento: scrivere la serie di Laurent di e^{1/z^2}).

(1) Dato che

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 + \dots$$

si ha

$$\frac{\sin z}{z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1-k}}{(2n+1)!} = z^{1-k} - \frac{1}{3!} z^{3-k} + \frac{1}{5!} z^{5-k} + \dots$$

Il residuo è il coefficiente c_{-1} di z^{-1} ovvero (da $2n+1-k = -1$ otteniamo $2n+1 = k-1$)

$$c_{-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ (-1)^n \frac{1}{(k-1)!} & \text{se } k > 0 \text{ è pari}\,. \end{cases}$$

(2) Dato che $e^w = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$ si ha $e^{1/z^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n} n!}$ e

$$e^{1/z^2} \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\sin z}{z^{2n}}\,.$$

Per il punto (1) il residuo di $\dfrac{\sin z}{z^{2n}}$ in 0 è $(-1)^n \dfrac{1}{(2n-1)!}$ (per $n \geq 1$) e dunque il residuo di $e^{1/z^2} \sin z$ è

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(2n-1)!} .$$

3. *Risolvere il seguente problema integro-differenziale mediante la trasformata di Laplace*

$$\begin{cases} u'(x) + 5 \displaystyle\int_0^x u(x-t) \cos(2t)\, dt = 10 \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Il secondo termine è la convoluzione di u e $\cos 2x$. Dunque, applicando la trasformata di Laplace si ha (posto $Y = \mathcal{L}[u]$)

$$sY + 5Y \frac{s}{s^2+4} = \frac{10}{s}$$

da cui

$$Y = \frac{10(s^2+4)}{s^2(s^2+9)} = \frac{40}{9} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{50}{9} \cdot \frac{1}{s^2+9}$$
$$= \frac{40}{9} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{50}{27} \cdot \frac{3}{s^2+9} = \frac{40}{9} \mathcal{L}[x] + \frac{50}{27} \mathcal{L}[\sin 3x]$$

e $u(x) = \dfrac{40}{9} x + \dfrac{50}{27} \sin 3x$.

4. *Sia $f(x) = sgn(x) \cdot \cos x$ definita per $x \in (-\pi, \pi)$ (sgn è la funzione segno)*

(a) *Calcolare la serie di Fourier di f in $L^2(-\pi, \pi)$;*

(b) *Discutere la convergenza puntuale della serie di Fourier su $[-\pi, \pi]$.*
(aiutarsi disegnando il grafico di f).

(a) La funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\cos x & \text{se } -\pi \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \cos x & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

è dispari. Conviene quindi usare la forma trigonometrica (in soli seni poiché $a_k = 0$ per ogni k). Si ha

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos t \sin kt\, dt$$

che si calcola integrando due volte per parti.

(b) La funzione è continua e monotona a tratti quindi la serie di Fourier converge alla semisomma dei limiti destro e sinistro, ovvero a $f(x)$ se $x \neq \pm\pi$ e a 0 se $x = \pm\pi$.

5. (a) *Scrivere l'integrale* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2it}(2+\cos t)^2}\, dt$ *come un integrale sulla circonferenza* $z = e^{-it}$ *(*$t \in [0, 2\pi]$*);*

(b) *Calcolare, se possibile, l'integrale così trovato usando il teorema dei residui.*

(a) La circonferenza in questione, che denotiamo con C, è la circonferenza unitaria percorsa in senso orario. Si ha $dz = -ie^{-it}dt - -izdt$, $e^{2it} = z^{-2}$ e

$$2 + \cos t = 2 + \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}\Big(4 + \frac{1}{z} + z\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{z^2+4z+1}{z}\Big)$$

per cui

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2it}(2+\cos t)^2}\, dt = i\int_C \frac{4z^3}{(z^2+4z+1)^2}\, dz.$$

Il denominatore si annulla per $z = -2 \pm \sqrt{3}$, per cui abbiamo un solo polo doppio interno alla circonferenza in $z = -2 + \sqrt{3}$. Il residuo dell'integrando g in tale punto è

$$\frac{d}{dz}\frac{4z^3}{(z+2+\sqrt{3})^2}_{|z=-2+\sqrt{3}} = \frac{12z^2}{(z+2+\sqrt{3})^2}_{|z=-2+\sqrt{3}} - 2\frac{4z^3}{(z+2+\sqrt{3})^3}_{|z=-2+\sqrt{3}}$$

da cui si ottiene l'integrale per il teorema dei residui:

$$i\int_C \frac{4z^3}{(z^2+4z+1)^2}\, dz = -i \cdot 2\pi i \operatorname{Res}(g \,|\, -2+\sqrt{3}) = 2\pi \operatorname{Res}(g \,|\, -2+\sqrt{3})$$

(il segno meno è dovuto al fatto che la circonferenza è percorsa in senso orario).

6. *Per ogni* $h \in \mathbb{N}$ *sia*

$$f_h(x) = \begin{cases} \max\{hx+1, 0\} & se\ x \leq 0 \\ -1 & se\ x \geq 0. \end{cases}$$

(a) *Calcolare* f_h' *e* f_h'' *nel senso delle distribuzioni;*

(b) *Calcolare il limite di* f_h' *nel senso delle distribuzioni per* $h \to +\infty$.

(a) La funzione f_h si scrive anche

$$f_h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -1/h \\ hx+1 & \text{se } -1/h \leq x < 0 \\ -1 & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

e la sua derivata quasi ovunque coincide con

$$g_h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -1/h \\ h & \text{se } -1/h \leq x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0\,. \end{cases}$$

Dato che f è discontinua in 0 con $f'(0-) = 1$ e $f'(0+) = -1$, dunque si ha

$$f_h' = g_h - 2\delta_0, \qquad f_h'' = h\delta_{-1/h} - h\delta_0 - 2\delta_0'\,.$$

(b) Per calcolare il limite di f_h' possiamo direttamente applicare la definizione: fissata una funzione test v calcoliamo

$$\lim_h \langle f_h', v\rangle = \lim_h \int_{-\infty}^{+\infty} g_h v\,dt - 2\,v(0) = \lim_h h \int_{-1/h}^{0} v\,dt - 2\,v(0) = v(0) - 2v(0) = -v(0)$$

e quindi il limite è $-\delta_0$.