METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2009-10
Quarto appello del 24/9/2010

Risolvere i seguenti esercizi, spiegando il procedimento usato

1. Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi,\pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = e^{it}$, $x_2(t) = e^{-it}$ e $x_3(t) = \cos t$.
(1) Trovare una base ortogonale di V;
(2) Calcolare la proiezione della funzione $x(t) = e^t$ su V.

2. (1) Per ogni $k \in \mathbb{N}$ calcolare il residuo di $f_k(z) = \dfrac{\sin z}{z^k}$ in 0;
(2) calcolare il residuo di $f(z) = e^{1/z^2} \sin z$ in 0.
(suggerimento: scrivere la serie di Laurent di e^{1/z^2}).

3. Risolvere il seguente problema integro-differenziale mediante la trasformata di Laplace

$$\begin{cases} u'(x) + 5 \displaystyle\int_0^x u(x-t)\cos(2t)\,dt = 10 \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

4. Sia $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \cos x$ definita per $x \in (-\pi,\pi)$ (sgn è la funzione segno)
(a) Calcolare la serie di Fourier di f in $L^2(-\pi,\pi)$;
(b) Discutere la convergenza puntuale della serie di Fourier su $[-\pi,\pi]$.
(aiutarsi disegnando il grafico di f).

5. (a) Scrivere l'integrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2it}(2+\cos t)^2}\,dt$ come un integrale sulla circonferenza $z = e^{-it}$ $(t \in [0,2\pi])$;
(b) Calcolare, se possibile, l'integrale così trovato usando il teorema dei residui.

6. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia

$$f_h(x) = \begin{cases} \max\{hx+1, 0\} & \text{se } x \le 0 \\ -1 & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$$

.
(a) Calcolare f_h' e f_h'' nel senso delle distribuzioni;
(b) Calcolare il limite di f_h' nel senso delle distribuzioni per $h \to +\infty$.