

METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2009-10
Terzo appello del 3/9/2010

Qui trovate le tracce delle soluzioni degli esercizi del compito. Ho tralasciato i calcoli che non hanno dato grandi problemi, che comunque sono parte della risoluzione richiesta, concentrandomi invece sul procedimento da usare.

1. Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = t$, $x_2(t) = \cos t$ e $x_3(t) = 1$.

(1) Trovare una base ortogonale di V ;

(2) Calcolare la distanza della funzione $y(t) = \sin t$ da V .

(1) Le funzioni x_1, x_2 e x_3 sono tra loro ortogonali in quanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} t \cos t \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \, dt = 0$$

(per i primi due integrali non occorre neanche fare i conti perché $t \cos t$ e t sono funzioni dispari). Dunque sono già una base ortogonale di V ;

(2) La proiezione di y su V è data dal teorema delle proiezioni. Dato che

$$(\sin t, \cos t) = (\sin t, 1) = 0$$

tale proiezione è semplicemente

$$\bar{y} = \frac{(\sin s, s)}{\|s\|^2} t;$$

ovvero, dato che

$$(\sin s, s) = \int_{-\pi}^{\pi} s \sin s \, dt = \left[-s \cos s \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos s \, ds = 2\pi$$

e

$$\|s\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} s^2 \, dt = 2\frac{\pi^3}{3},$$

si ha

$$\bar{y} = \frac{3}{\pi^2} t.$$

La distanza di y da V è uguale alla distanza di y da $\bar{y}$, il cui quadrato è dato da

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin t - \frac{3}{\pi^2} t \right|^2 dt.$$

Non svolgiamo questo calcolo.

2. Sia $f(x) = \frac{1}{x^3 - 8i}$. Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{f}(\omega)$ per $\omega \geq 0$

Si ha

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^3 - 8i} dx$$

Per $\omega \geq 0$ si può usare il lemma del grande cerchio su semicirconferenze nel semipiano $\text{Im } z < 0$. Si ha allora

$$\hat{f}(\omega) = -2\pi \sum_k \text{Res}(g_\omega | z_k),$$

dove $g(z) = \frac{e^{-i\omega z}}{z^3 - 8i}$ e la somma è fatta sui poli di g con $\text{Im } z_k < 0$. L'unico tale polo è $z = -2i$, che è polo semplice. Fattorizzando

$$z^3 - 8i = (z + 2i)(z^2 - 2zi - 4)$$

si ottiene

$$\text{Res}(g_\omega | z_k) = \frac{e^{-i\omega z}}{z^2 - 2zi - i} \Big|_{z=-2i} = -\frac{e^{-2\omega}}{12}$$

e

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\pi}{6} e^{-2\omega}.$$

3. Risolvere il seguente problema integro-differenziale mediante la trasformata di Laplace

$$\begin{cases} u'(x) + \int_0^x u(x-t) dt = x^2 \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Basta applicare la trasformata di Laplace ai tre termini dell'equazione:

$$\mathcal{L}[u'](s) = s \mathcal{L}[u](s),$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x u(x-t) dt\right](s) = \mathcal{L}[u * H](s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}[u](s)$$

$$\mathcal{L}[x^2](s) = \frac{2}{s^3},$$

da cui, posto $Y = \mathcal{L}[u](s)$

$$sY + \frac{1}{s}Y = \frac{2}{s^3},$$

e

$$Y = \frac{2}{s^2(1+s^2)} = \frac{2}{s^2} - \frac{2}{1+s^2}.$$

Antitrasformando, si ha

$$y(x) = 2x - 2 \sin x.$$

4. Sia $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ -\cos x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$

(a) Calcolare la serie di Fourier di f in $L^2(-\pi, \pi)$;

(b) Discutere la convergenza puntuale della serie di Fourier su $[-\pi, \pi]$.

(a) La funzione non è né pari né dispari. È quindi equivalente il calcolo della serie in forma trigonometrica o esponenziale. Usiamo la seconda.

Calcoliamo allora:

$$\begin{aligned} (f | e^{ikt}) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt = - \int_{-\pi}^0 \cos t e^{-ikt} dt = - \int_{-\pi}^0 \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right) e^{-ikt} dt \\ &= -\frac{1}{2} \left(\int_{-\pi}^0 e^{i(1-k)t} dt + \int_{-\pi}^0 e^{-i(1+k)t} dt \right) = -\frac{1}{2} \left(\left[\frac{e^{i(1-k)t}}{i(1-k)} \right]_{-\pi}^0 - \left[\frac{e^{-i(1+k)t}}{i(1+k)} \right]_{-\pi}^0 \right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ i \frac{2k}{1-k^2} & \text{se } k \text{ è pari.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dunque i coefficienti di Fourier sono

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 2h + 1 \text{ è dispari} \\ \frac{2hi}{\pi(1-4h^2)} & \text{se } k = 2h \text{ è pari} \end{cases}$$

e la serie è

$$s(x) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{2hi}{\pi(1-4h^2)} e^{2hxi}.$$

(b) La funzione f , estesa per periodicità su $\mathbb{R}$, è monotona e continua a tratti, dunque in $[-\pi, \pi]$ la serie di Fourier converge puntualmente a

$$s(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 0, \pm\pi \\ -\frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = \pm\pi. \end{cases}$$

5. (a) Scrivere l'integrale $\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2it}(1+\sin t)^2} dt$ come un integrale sulla circonferenza C di equazioni parametriche $z = 2e^{-it}$ ($t \in [0, 2\pi]$);

(b) Calcolare l'integrale così trovato usando il teorema dei residui.

(a) Si ha $dz = -i2e^{-it}dt = -izdt$, $\frac{1}{e^{2it}} = (e^{-it})^2 = \frac{(2e^{-it})^2}{4} = \frac{z^2}{4}$ e

$$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) = \frac{1}{2i} \left(\frac{2}{2e^{-it}} - \frac{2e^{-it}}{2} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{2}{z} - \frac{z}{2} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{4-z^2}{2z} \right),$$

da cui

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2it}(1+\sin t)^2} dt &= i \int_C \frac{z^2}{4\left(1+\frac{4-z^2}{4iz}\right)^2} \frac{1}{z} dz \\ &= i \int_C \frac{z}{4\left(\frac{4iz+4-z^2}{4iz}\right)^2} dz = -4i \int_C \frac{z^3}{(z-2i)^4} dz\end{aligned}$$

(b) Dato che $z-2i$ si annulla su $2i$ che appartiene alla circonferenza C , non siamo nelle ipotesi del teorema dei residui, che quindi non si può applicare.

Nota: il punto (b) si ritiene risolto anche calcolando il residuo in $z=2i$, se non ci si accorge che $2i \in C$:

$$\text{Res} \left(-4i \frac{z^3}{(z-2i)^4} \middle| 2i \right) = -4i \frac{1}{6} \frac{d^3 z^3}{dz^3} \Big|_{z=2i} = -4i.$$

6. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia $f_h(x) = \chi_{(-\infty, h)}(x) \cos(2\pi hx)$.

(a) Calcolare f'_h e f''_h nel senso delle distribuzioni;

(b) Calcolare il limite di f'_h nel senso delle distribuzioni per $h \rightarrow +\infty$.

(a) Dato che f_h è derivabile (infinite volte) tranne che per $x=h$ e in questo punto c'è un salto, si ha

$$f'_h(x) = -2\pi h \chi_{(-\infty, h)}(x) \sin(2\pi hx) - \delta(x-h)$$

e (tenendo conto che $\sin(2\pi h^2) = 0$)

$$f''_h(x) = -4\pi^2 h^2 \chi_{(-\infty, h)}(x) \cos(2\pi hx) - \delta'(x-h).$$

(b) Appliciamo la definizione: fissiamo v funzione test (con supporto contenuto in $[a, b]$) e calcoliamo

$$\begin{aligned}\lim_h \langle f'_h, v \rangle &= -\lim_h \langle f_h, v' \rangle = -\lim_h \int_{-\infty}^{+\infty} f_h(t) v'(t) dt \\ &= -\lim_h \int_a^b f_h(t) v'(t) dt = -\lim_h \int_a^b \cos(2\pi ht) v'(t) dt\end{aligned}$$

(qui abbiamo notato che possiamo supporre $b < h$, dato che $h \rightarrow +\infty$). Dato che $\cos(2\pi ht) \rightarrow 0$ nel senso delle distribuzioni (Lemma di Riemann-Lebesgue) questo integrale tende a 0. Questo mostra che il limite di f'_h è 0