

METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2009-10
Terzo appello del 3/9/2010

Risolvere i seguenti esercizi, spiegando il procedimento usato

1. Sia V il sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni $x_1(t) = t$, $x_2(t) = \cos t$ e $x_3(t) = 1$.

- (1) Trovare una base ortogonale di V ;
- (2) Calcolare la distanza della funzione $y(t) = \sin t$ da V .

2. Sia $f(x) = \frac{1}{x^3 - 8i}$. Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{f}(\omega)$ per $\omega \geq 0$

3. Risolvere il seguente problema integro-differenziale mediante la trasformata di Laplace

$$\begin{cases} u'(x) + \int_0^x u(x-t) dt = x^2 \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

4. Sia $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ -\cos x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$

- (a) Calcolare la serie di Fourier di f in $L^2(-\pi, \pi)$;
- (b) Discutere la convergenza puntuale della serie di Fourier su $[-\pi, \pi]$.

5. (a) Scrivere l'integrale $\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2it}(1 + \sin t)^2} dt$ come un integrale sulla circonferenza $z = 2e^{-it}$ ($t \in [0, 2\pi]$);

- (b) Calcolare l'integrale così trovato usando il teorema dei residui.

6. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia $f_h(x) = \chi_{(-\infty, h)}(x) \cos(2\pi hx)$.

- (a) Calcolare f'_h e f''_h nel senso delle distribuzioni;
- (b) Calcolare il limite di f'_h nel senso delle distribuzioni per $h \rightarrow +\infty$.