METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2009-10
Secondo appello del 12/7/2010

Qui trovate le tracce delle soluzioni degli esercizi del compito. Ho tralasciato i calcoli che non hanno dato grandi problemi (in particolare il calcolo dei residui e il calcolo dei coefficienti della serie di Fourier), che comunque sono parte della risoluzione richiesta, concentrandomi invece sul procedimento da usare.

1. (a) *Dire per quali* $p \in [1, +\infty)$ *la funzione* $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ *appartiene allo spazio* $L^p(0, +\infty)$.

(b) *Dire per quali* $p \in [1, +\infty)$ *le funzioni* $f_h(x) = \sqrt{h}\,\dfrac{e^{-hx}}{\sqrt{x}}$ *convergono a* 0 *in* $L^p(0, +\infty)$.

(a) f appartiene a $L^p(0, +\infty)$ vuol dire che $\int_0^{+\infty} |f(x)|^p \, dx$ converge come integrale improprio. Nel nostro caso dobbiamo vedere se converge

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-px}}{x^{p/2}} \, dx.$$

Questo è un integrale improprio che è sempre convergente all'infinito; in 0 converge se $p/2 < 1$, ovvero $p < 2$.

(b) f_h converge a 0 in $L^p(0, +\infty)$ vuol dire che $\lim_h \int_0^{+\infty} |f_h(x)|^p \, dx = 0$. Nel nostro caso dobbiamo calcolare

$$\lim_h h^{p/2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-phx}}{x^{p/2}} \, dx = \lim_h h^{p-1} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-py}}{y^{p/2}} dy$$

(abbiamo cambiato variabile $y = hx$). Perché questo limite tenda a 0 deve essere $p - 1 < 0$, ovvero $p < 1$, che non è verificato mai.

2. *Sia* $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + i}$. *Calcolare la trasformata di Fourier* $\widehat{f}(\omega)$ *per* $\omega \geq 0$

Bisogna calcolare

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^3 + i} \, dx \, .$$

Per farlo si può usare il Lemma di Jordan del grande cerchio per una semicirconferenza nel semipiano $\text{Im} z < 0$. Dunque si ha

$$\widehat{f}(\omega) = \sum \text{Res}(g \,|\, z_k),$$

dove

$$g(z) = \frac{e^{-i\omega z}}{z^3 + i}$$

e z_k sono i poli di g con $\mathrm{Im} z_k < 0$. Le radici di $z^3 + i$ sono

$$z_1 = i, \qquad z_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

e quindi i poli cercati sono z_2 e z_3. Sono entrambi poli semplici. Il calcolo dei residui è standard e lo tralascio.

3. *Trovare, se esiste, la soluzione del seguente problema integrale mediante la trasformata di Laplace*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^x u(t)\, u(x-t)\, dt = x^2 \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Dato che la condizione $u(0) = 1$ non compare nella soluzione dell'equazione integrale, dobbiamo risolverla e poi verificare se la soluzione verifica la condizione.

Trasformando l'equazione (e notando che abbiamo la convoluzione di u con se stessa) otteniamo

$$(\mathcal{L}[u])^2 = \mathcal{L}[u^* u] = \mathcal{L}[x^2] = \frac{2}{s^3}.$$

Dunque

$$\mathcal{L}[u] = \frac{\sqrt{2}}{s^{3/2}}.$$

Dato che $\mathcal{L}[x^\alpha] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$, possiamo scrivere

$$\mathcal{L}[u] = \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(3/2)} \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(3/2)} \mathcal{L}[x^{1/2}] = \mathcal{L}\left[\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\right]$$

e $u(x) = \dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$. Dato che u non verifica la condizione iniziale, in problema non ha soluzione.

4. *Sia* $f(x) = \begin{cases} 2x & \textit{se } x > 0 \\ -x & \textit{se } x \leq 0. \end{cases}$

(a) *Calcolare la serie di Fourier di f in $L^2(-\pi, \pi)$;*

(b) *Scriverne la relativa identità di Parseval;*

(c) *Discutere la convergenza puntuale della serie di Fourier su $[-\pi, \pi]$.*

È conveniente usare la forma trigonometrica. La funzione non è ne' pari ne' dispari, quindi avremo tutti i coefficienti. Per calcolarli separatamente conviene scrivere f come somma della sua parte pari e della sua parte dispari:

$$f(x) = \frac{3}{2}|x| + \frac{1}{2}x.$$

I calcoli delle serie di Fourier delle funzioni $|x|$ e x in $L^2(-\pi,\pi)$ sono semplici e danno:

$$|x| \approx \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$$

(Esempio 3.1-1 nel testo)

$$x \approx 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{x}$$

(Esempio 3.2-4 nel testo), per cui

$$f(x) \approx \frac{3\pi}{4} - \frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\,.$$

(b) L'identità di Parseval in forma trigonometrica è

$$\frac{1}{\pi}\|f\|_2^2 = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Dato che

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{0} x^2\,dx + \int_0^{\pi} 4x^2\,dx = \frac{5}{3}\pi^3,$$

si ha

$$\frac{5}{3}\pi^2 = \frac{9}{16}\pi^2 + \frac{36}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

(c) Dato che f è monotona a tratti, la serie di Fourier converge alla semisomma dei limiti destro e sinistro della funzione 2π-periodica che coincide con f su $(-\pi,\pi)$. Dunque la serie converge a f su $(-\pi,\pi)$ e converge a $(f(-\pi)+f(\pi))/2 = \frac{3}{2}\pi$ in $\pm\pi$.

5. (a) *Scrivere l'integrale* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2it}(2+\sin t)}\,dt$ *come un integrale sulla circonferenza* $z = e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$;

(b) *Calcolare l'integrale così trovato usando il teorema dei residui.*

(a) Se $z = e^{it}$ allora $dz = i\,e^{it}\,dt = iz\,dt$. Inoltre

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}.$$

Con queste sostituzioni si ha facilmente

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2it}(2+\sin t)}\,dt = \int_\gamma \frac{1}{z^2(z^2+4zi-1)}\,dz,$$

dove γ è la circonferenza unitaria percorsa in senso antiorario.

(b) Per il teorema dei residui si ha

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2(z^2+4zi-1)}\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(g\,|\,z_k),$$

dove

$$g(z) = \frac{1}{z^2(z^2+4zi-1)}$$

e z_k sono i punti singolari interni a γ. La funzione g ha un polo doppio in 0 (interno a γ) e due poli semplici in $-2i+\sqrt{3}i$ (interno a γ) e $-2i-\sqrt{3}i$ (esterno a γ). Il calcolo dei residui è standard e lo tralascio.

6. *Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia $f_h(x) = \min\{h|x|, 1\}$.*

(a) *Calcolare f_h' e f_h'' nel senso delle distribuzioni;*

(b) *Calcolare i limiti di f_h' e f_h'' nel senso delle distribuzioni per $h \to +\infty$.*

(a) Le funzioni f_h sono continue e derivabili a tratti, quindi la loro derivata nel senso delle distribuzioni coincide con la derivata puntuale quasi ovunque:

$$f_h'(x) = \begin{cases} -h & \text{se } -\frac{1}{h} < x < 0 \\ h & \text{se } 0 < x < \frac{1}{h} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La funzione $g_h = f_h'$ è costante a tratti, quindi la sua derivata è una somma di delta di Dirac:

$$f_h''(x) = g_h'(x) = -h\delta_{-1/h} + 2h\delta_0 - h\delta_{1/h}.$$

(b) Per calcolare i limiti nel senso delle distribuzioni dobbiamo fissare $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ funzione test e calcolare $\lim_h \langle f_h', v\rangle$ e $\lim_h \langle f_h'', v\rangle$.

Nel primo caso, usando lo sviluppo di Taylor $v(x) = v(0) + o(1)$

$$\begin{aligned} \lim_h \langle f_h', v\rangle &= \lim_h \Big(-h\int_{-1/h}^0 v(x)\,dx + h\int_0^{1/h} v(x)\,dx\Big) \\ &= \lim_h \Big(-h\int_{-1/h}^0 v(0)\,dx + h\int_0^{1/h} v(0)\,dx + o(1)\Big) = 0. \end{aligned}$$

Nel secondo caso

$$\lim_h \langle f_h'', v\rangle = \lim_h \left(\frac{v(0)-v(1/h)}{1/h} - \frac{v(-1/h)-v(0)}{1/h}\right) = v'(0) - v'(0) = 0.$$

Dunque i limiti di f_h' e f_h'' nel senso delle distribuzioni per $h \to +\infty$ sono 0 in entrambi i casi.