

METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2009-10
Secondo appello del 12/7/2010

Risolvere i seguenti esercizi, spiegando il procedimento usato

1. (a) Dire per quali $p \in [1, +\infty)$ la funzione $f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ appartiene allo spazio $L^p(0, +\infty)$.
(b) Dire per quali $p \in [1, +\infty)$ le funzioni $f_h(x) = \sqrt{h} \frac{e^{-hx}}{\sqrt{x}}$ convergono a 0 in $L^p(0, +\infty)$.

2. Sia $f(x) = \frac{1}{x^3 + i}$. Calcolare la trasformata di Fourier $\widehat{f}(\omega)$ per $\omega \geq 0$

3. Trovare, se esiste, la soluzione del seguente problema integrale mediante la trasformata di Laplace

$$\begin{cases} \int_0^x u(t) u(x-t) dt = x^2 \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

4. Sia $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$

- (a) Calcolare la serie di Fourier di f in $L^2(-\pi, \pi)$;
(b) Scrivere la relativa identità di Parseval;
(c) Discutere la convergenza puntuale della serie di Fourier su $[-\pi, \pi]$.

5. (a) Scrivere l'integrale $\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2it}(2 + \sin t)} dt$ come un integrale sulla circonferenza $z = e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$);

- (b) Calcolare l'integrale così trovato usando il teorema dei residui.

6. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia $f_h(x) = \min\{h|x|, 1\}$.

- (a) Calcolare f'_h e f''_h nel senso delle distribuzioni;
(b) Calcolare i limiti di f'_h e f''_h nel senso delle distribuzioni per $h \rightarrow +\infty$.