

METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2009-10
Primo appello del 9/6/2010

Risolvere i seguenti esercizi, spiegando il procedimento usato

1. Calcolare la proiezione in $L^2(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ di $x(t) = t$ sul sottospazio generato da $x_1(t) = \sin t$ e $x_2(t) = e^{it}$.

Dato che $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ il sottospazio è anche generato da $\bar{x}_1(t) = e^{-it}$ e $\bar{x}_2(t) = e^{it}$. Queste due funzioni sono ortogonali, in quanto

$$(e^{ix} | e^{-ix}) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{ix} \overline{e^{-ix}} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2ix} dx = \left[\frac{1}{2i} e^{2ix} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2i} (e^{\pi i} - e^{-\pi i}) = 0,$$

e il quadrato della loro norma è

$$\|e^{ix}\|_2^2 = \|e^{-ix}\|_2^2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |e^{-ix}|^2 dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dx = \pi.$$

Si ha inoltre

$$(t | e^{it}) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t e^{-it} dt = [it e^{-it} + e^{-it}]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -2i,$$

$$(t | e^{-it}) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t e^{it} dt = [-it e^{it} - e^{it}]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2i,$$

Dunque per il teorema delle proiezioni la funzione cercata è

$$y(x) = (t | e^{it}) \frac{1}{\pi} e^{ix} + (t | e^{-it}) \frac{1}{\pi} e^{-ix} = \frac{2i}{\pi} (e^{-ix} - e^{ix}) = \frac{-4}{\pi} \left(\frac{e^{-ix} - e^{ix}}{2i} \right) = \frac{4}{\pi} \sin x.$$

Una scelta alternativa, che deriva dall'osservazione che $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, è prendere $\bar{x}_1(t) = \sin t$ e $\bar{x}_2(t) = \cos t$. Di nuovo

$$(\sin t | \cos t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t \cos t dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin(2t) dt = 0.$$

Inoltre

$$\|\sin t\|_2^2 = \|\cos t\|_2^2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} (\cos 2t + 1) dt = \frac{\pi}{2},$$

$$(t | \cos t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t \cos t dt = 0 \quad (\text{integrale di funzione dispari}),$$

$$(t \mid \sin t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t \sin t \, dt = [-t \cos t + \sin t]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2,$$

e la funzione cercata è (di nuovo)

$$y(x) = (t \mid \sin t) \frac{2}{\pi} \sin x = \frac{4}{\pi} \sin x.$$

2. Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 4)(x^2 + 2x + 2)}$

(suggerimento: un modo possibile è usare il teorema dei residui).

Calcolare la parte dispari di f e la relativa trasformata di Fourier.

Calcoliamo

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{(x^2 + 4)(x^2 + 2x + 2)} dx$$

usando il teorema dei residui. Fissato ω la funzione integranda si scrive

$$g(z) = \frac{e^{-i\omega z}}{(z - 2i)(z + 2i)(z + 1 - i)(z + 1 + i)};$$

i punti singolari sono

$$2i, \quad -2i, \quad -1 + i, \quad -1 - i,$$

e sono tutti poli semplici. I residui si ottengono facilmente dalla formula (dato che si hanno semplificazioni nelle formule non occorre prendere il limite per $z \rightarrow z_0$)

$$\text{Res}(g \mid z_0) = (z - z_0)g(z)|_{z=z_0} :$$

$$\text{Res}(g \mid 2i) = \frac{e^{2\omega}}{4i(1 + 3i)(1 + i)} = \frac{e^{2\omega}}{4i(4i - 2)},$$

$$\text{Res}(g \mid -2i) = -\frac{e^{-2\omega}}{4i(1 - 3i)(1 - i)} = \frac{e^{-2\omega}}{4i(4 + 2i)},$$

$$\text{Res}(g \mid -1 + i) = \frac{e^{(1+i)\omega}}{(1 + i)(1 - 3i)2i} = \frac{e^{(1+i)\omega}}{2i(4 - 2i)},$$

$$\text{Res}(g \mid -1 - i) = -\frac{e^{(-1+i)\omega}}{(1 - i)(1 + 3i)2i} = -\frac{e^{(-1+i)\omega}}{2i(4 + 2i)}.$$

Per $\omega < 0$ possiamo usare il Lemma di Jordan del grande cerchio, integrando su una semicirconferenza nel semipiano $\text{Im} z > 0$ con diametro $[-R, R]$. Facendo tendere $R \rightarrow +\infty$ si ottiene

$$\hat{f}(\omega) = 2\pi i \left(\text{Res}(g \mid 2i) + \text{Res}(g \mid -1 + i) \right) = \pi \frac{e^{2\omega}}{2(4i - 2)} + \pi \frac{e^{(1+i)\omega}}{4 - 2i}$$

Per $\omega > 0$ possiamo usare il Lemma di Jordan del grande cerchio, integrando su una semicirconferenza nel semipiano $\text{Im}z < 0$ con diametro $[-R, R]$. Facendo tendere $R \rightarrow +\infty$ si ottiene

$$\widehat{f}(\omega) = -2\pi i \left(\text{Res}(g \mid -2i) + \text{Res}(g \mid -1-i) \right) = -\pi \frac{e^{-2\omega}}{2(2+4i)} + \pi \frac{e^{(-1+i)\omega}}{4+2i}$$

La parte dispari di f è

$$f_d(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = \frac{1}{2(x^2+4)} \left(\frac{1}{(x^2+2x+2)} - \frac{1}{(x^2-2x+2)} \right) = -\frac{2x}{(x^2+4)(x^4+4)},$$

la cui trasformata di Fourier è i volte la parte immaginaria di $\widehat{f}$. Dato che $\widehat{f}_d$ è dispari, basta calcolarla per $\omega > 0$:

$$\widehat{f}_d(\omega) = i\pi \text{Im} \left(-\frac{e^{-2\omega}}{2(2+4i)} + \frac{e^{(-1+i)\omega}}{4+2i} \right) = i\pi \left(\frac{e^{-2\omega}}{10} + \frac{e^{-\omega}}{10} (2\sin\omega - \cos\omega) \right).$$

Dato che per $\omega < 0$ si ha $\widehat{f}_d(\omega) = -\widehat{f}_d(-\omega)$ la formula finale è

$$\widehat{f}_d(\omega) = \frac{\omega}{|\omega|} i\pi \left(\frac{e^{-2|\omega|}}{10} - \frac{e^{-|\omega|} \cos\omega}{10} \right) + i\pi \frac{e^{-|\omega|} \sin\omega}{5}.$$

3. *Risolvere il seguente problema integro-differenziale mediante la trasformata di Laplace*

$$\begin{cases} u' + u = -3 \int_0^x u(t) e^{3(x-t)} dt \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Applicando la trasformata di Laplace a entrambi i membri, si ha

$$s \mathcal{L}[u] - 1 + \mathcal{L}[u] = \mathcal{L}[u'] + \mathcal{L}[u] = -3\mathcal{L}[u^* e^{3t}] = -3\mathcal{L}[u] \mathcal{L}[e^{3t}] = -3\mathcal{L}[u] \frac{1}{s-3},$$

da cui

$$\mathcal{L}[u] \left(s + 1 + \frac{1}{s-3} \right) = 1,$$

ovvero

$$\mathcal{L}[u] = \frac{s-3}{s^2-2s} = \frac{3}{2} \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{1}{s-2} = \frac{3}{2} \mathcal{L}[1] - \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{2x}],$$

da cui

$$u(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} e^{2x}.$$

4. Dire se le seguenti successioni di funzioni convergono per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$, in $L^2(\mathbb{R})$, in $L^1(\mathbb{R})$ o nel senso delle distribuzioni:

$$f_n(x) = \sqrt{n} e^{-nx^2}, \quad g_n(x) = e^{-nx^2}, \quad h_n(x) = e^{-(x-n)^2}.$$

Dato che $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\alpha t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{t} e^{-\alpha t} = 0$ per ogni $\alpha > 0$ si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = 0$ per ogni $x \neq 0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) = 0$ per ogni x . Quindi il limite quasi ovunque è sempre la funzione 0.

1) Successione f_n . Calcoliamo le norme delle funzioni (usiamo il cambio di variabili $y = \sqrt{n}x$):

$$\begin{aligned} \|f_n\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} n e^{-2nx^2} dx = \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2y^2} dy \rightarrow +\infty \\ \|f_n\|_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \rightarrow \sqrt{\pi} \neq 0. \end{aligned}$$

Dunque f_n non converge a 0 ne' in L^1 ne' in L^2 , mentre $f_n \rightarrow \sqrt{\pi} \delta_0$ nel senso delle distribuzioni:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n v dx = \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nx^2} v(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} v\left(\frac{y}{n}\right) dy \rightarrow v(0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = v(0) \sqrt{\pi}.$$

2) Successione g_n . Calcoliamo le norme delle funzioni ($y = \sqrt{n}x$):

$$\begin{aligned} \|g_n\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2nx^2} dx = \sqrt{\frac{1}{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2y^2} dy \rightarrow 0 \\ \|g_n\|_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nx^2} dx = \sqrt{\frac{1}{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Quindi g_n tende a 0 sia in L^2 che in L^1 (e quindi anche nel senso delle distribuzioni).

3) Successione h_n . Le funzioni sono traslate della funzione e^{-x^2} , quindi

$$\|h_n\|_2 = \|e^{-x^2}\|_2, \quad \|h_n\|_1 = \|e^{-x^2}\|_1$$

che non tendono a 0. Dunque h_n non converge ne' in L^1 ne' in L^2 , mentre $h_n \rightarrow 0$ nel senso delle distribuzioni: usando il cambio di variabili $y = x - n$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-n)^2} v(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} v(y+n) dy \rightarrow 0$$

dato che $v(y+n) \rightarrow 0$ per ogni fissato y .

5. Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \frac{1}{z(z^3 - 1)^2} dz$ nei seguenti casi:

(a) γ la circonferenza in $\mathbb{C}$ di centro 2 e raggio $1/2$;

(b) γ la circonferenza in $\mathbb{C}$ di centro 1 e raggio $3/2$

(orientate positivamente).

La funzione

$$f(z) = \frac{1}{z(z^3 - 1)^2}$$

ha un polo semplice in 0 e poli doppi in 1, $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(a) La circonferenza non contiene poli. Dunque f è olomorfa al suo interno e l'integrale è nullo.

(b) La circonferenza contiene i poli 0 e 1. Dunque

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z(z^3 - 1)^2} dz = 2\pi i \left(\text{Res}(f | 0) + \text{Res}(f | 1) \right).$$

Si ha (dato che si hanno semplificazioni nelle formule non occorre prendere i limiti)

$$\text{Res}(f | 0) = (z^3 - 1)^2_{|z=0} = 1,$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f | 1) &= \frac{d}{dz} \left((z - 1)^2 f(z) \right)_{|z=1} = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z(z^2 + z + 1)^2} \right)_{|z=1} \\ &= - \frac{(z^2 + z + 1) + 2z(2z + 1)}{z^2(z^2 + z + 1)^3} = - \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

e quindi il risultato è $\frac{4}{3}\pi i$.

6. Calcolare il limite nel senso delle distribuzioni per $h \rightarrow +\infty$ della successione di funzioni

$$f_h(x) = h^2 \chi_{(0, 1/h)}(x) - h^2 \chi_{(-1/h, 0)}(x)$$

(suggerimento: usare lo sviluppo di Taylor in 0 di v nel calcolo di $\langle f_h, v \rangle$).

Seguendo il suggerimento scriviamo $v(x) = v(0) + v'(0)x + o(x)$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} \langle f_h, v \rangle &= h^2 \left(\int_0^{1/h} v(x) dx - \int_{-1/h}^0 v(x) dx \right) \\ &= h^2 \left(\int_0^{1/h} (v(0) + v'(0)x + o(1/h)) dx - \int_{-1/h}^0 (v(0) + v'(0)x + o(1/h)) dx \right) \\ &= h^2 \left(\frac{1}{h} v(0) + \frac{1}{2h^2} v'(0) + \frac{1}{h} o(1/h) - \left(-\frac{1}{h} v(0) + \frac{1}{2h^2} v'(0) + \frac{1}{h} o(1/h) \right) \right) = v'(0) + h o(1/h) \rightarrow v'(0), \end{aligned}$$

ovvero

$$\lim_h \langle f_h, v \rangle = \langle \delta, v' \rangle = -\langle \delta', v \rangle.$$

e la successione tende a $-\delta'$.