

METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - A.A. 2009-10
Primo appello del 9/6/2010

Risolvere i seguenti esercizi, spiegando il procedimento usato

1. Calcolare la proiezione in $L^2(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ di $x(t) = t$ sul sottospazio generato da $x_1(t) = \sin t$ e $x_2(t) = e^{it}$.

2. Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 4)(x^2 + 2x + 2)}$
(suggerimento: un modo possibile è usare il teorema dei residui).
Calcolare la parte dispari di f e la relativa trasformata di Fourier.

3. Risolvere il seguente problema integro-differenziale mediante la trasformata di Laplace

$$\begin{cases} u' + u = -3 \int_0^x u(t) e^{3(x-t)} dt \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

4. Dire se le seguenti successioni di funzioni convergono per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$, in $L^2(\mathbb{R})$, in $L^1(\mathbb{R})$ o nel senso delle distribuzioni:

$$f_n(x) = \sqrt{n} e^{-nx^2}, \quad g_n(x) = e^{-nx^2}, \quad h_n(x) = e^{-(x-n)^2}.$$

5. Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \frac{1}{z(z^3 - 1)^2} dz$ nei seguenti casi:

- (a) γ la circonferenza in $\mathbb{C}$ di centro 2 e raggio 1/2;
- (b) γ la circonferenza in $\mathbb{C}$ di centro 1 e raggio 3/2 (orientate positivamente).

6. Calcolare il limite nel senso delle distribuzioni per $h \rightarrow +\infty$ della successione di funzioni

$$f_h(x) = h^2 \chi_{(0,1/h)}(x) - h^2 \chi_{(-1/h,0)}(x)$$

(suggerimento: usare lo sviluppo di Taylor in 0 di v nel calcolo di $\langle f_h, v \rangle$).