

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA (Braides) – A.A. 2009-10
Quinto appello del 31/1/2011

Risolvere i seguenti esercizi, spiegando il procedimento usato

1. Calcolare il limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} \log\left(\frac{x^2 + y^2 + x^3 y}{x^2 + y^2}\right)$.
2. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = x^{(y^2)} - \log\left(\frac{x+1}{y+1}\right)$ nel punto $x = y = 1$.
3. Determinare gli insiemi dove è convessa o concava la funzione $f(x, y) = x \log(xy)$.
4. Sia $\gamma : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t)$. Calcolare $\int_{\gamma} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy\right)$.
5. Dire se l'equazione $\sin(xe^y) + \log(\cos(x+y)) = 0$ definisce implicitamente una funzione $\varphi = \varphi(y)$ in un intorno di $(0, 0)$, e, se esiste, calcolarne lo sviluppo di Taylor di ordine 1.
6. Trovare massimi e minimi assoluti di $f(x, y) = ye^x$ sulla circonferenza di centro 0 e raggio 1.
7. Sia $D = \{(x, y) : y^2 \leq |x| \leq 2 + 2|y|\}$. Disegnare D e calcolare $\iint_D (|x| + x^2 \sin y) dx dy$.
(Suggerimento: disegnare prima D nel quadrante $x \geq 0, y \geq 0$. Usare le simmetrie di D e dell'integrando)
8. Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^3 - i} dx$
9. Calcolare $\int_{\gamma} \frac{\sin(i\pi z)}{(z^2 + 4)^2} dz$, dove
 - (a) γ è la circonferenza di centro i e raggio $1/2$;
 - (b) γ è la circonferenza di centro 0 e raggio 3.
10. Usando la trasformata di Laplace trovare la soluzione y di $\begin{cases} y'' + y = \sin x \\ y(0) = 1, y'(0) = 2 \end{cases}$