

COMPLEMENTI DI MATEMATICA – INGEGNERIA A.A. 2009-10
Secondo appello del 13/7/2010

Risolvere i seguenti esercizi, spiegando il procedimento usato

1. Calcolare il limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin(xy) - x \sin(x^2y)}{x^5 y^3}$.
2. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = x^y + \sin(x \log y)$ nel punto $(1, 1)$.
3. Sia $\gamma : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (1 + \cos t, 2 - \sin t)$. Calcolare $\int_{\gamma} \omega$, dove

$$\omega = \left(x + 3x^2 \log y\right) dx + \left(\frac{x^3}{y} - 1\right) dy$$

(suggerimento: trovare un potenziale per ω).

4. Classificare i punti stazionari della funzione $f(x, y) = xy - x^2 + \log(2x - y)$ nel suo dominio.
5. Dire per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$C = \{(x, y) : (x^2 + y^2 - \alpha)(y^2 - x) = 0\}$$

definisce implicitamente una curva regolare nell'intorno di ogni suo punto.

6. Sia $D = \{(x, y) : |y| \leq 2 - x^2\}$. Disegnare D . Calcolare massimi e minimi su D di

$$f(x, y) = x^2 - 2y + y^2.$$

7. Sia D è l'intersezione della circonferenza di centro 0 e raggio 1 e l'insieme

$$\{(x, y) : (y - x\sqrt{3})(y\sqrt{3} - x) < 0\}.$$

Disegnare D e calcolare $\iint_D |x|y^2 dx dy$.

8. Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3 + i} dx$.
9. Calcolare $\int_{\gamma} \frac{\cos(i\pi z)}{(z - 2)^2 e^{i\pi z}} dz$, dove γ è una parametrizzazione in senso antiorario di

$$\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = \beta\}, \text{ nei due casi: } \quad (\text{a}) \beta = 1; \quad (\text{b}) \beta = 4.$$

10. Usando la trasformata di Laplace trovare la soluzione y di $\begin{cases} y'' + y = \cos x \\ y(0) = 0, y'(0) = 2 \end{cases}$

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza