COMPLEMENTI DI MATEMATICA – A.A. 2009-10
Primo appello del 5/5/2010

Risolvere i seguenti esercizi, spiegando il procedimento usato

1. Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy - y\sin x}{x^2+y^2}$.

2. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = e^{x+y}\log|x-y+1| + \sin(\pi x/y)$ nel punto $(1,1)$.

3. Sia $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sin t, \cos t)$. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma (y\,dx - x\,dy)$.

4. Sia $\omega = \left(p^2 x e^{x^2+y} + \cos(x+y^2)\right) dx + \left(e^{x^2+y} + p^2 y\cos(x+y^2)\right) dy$.
Dire per quali valori del parametri p è una forma esatta e calcolarne il potenziale.

5. Dire per quali punti (x,y) l'espressione $x^4y^2 + x^3y^3 - xy = 0$ non definisce una funzione implicita $y = \varphi(x)$ in un intorno di (x,y). Calcolare φ' in uno degli altri punti a scelta con $xy \neq 0$.

6. Sia $C = \{(x,y) : x^2 \le y \le \sqrt{|x|}$. Disegnare C. Calcolare massimi e minimi di $f(x,y) = x + 2y - 3$ su C usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e calcolando ∇f nei punti angolosi della frontiera di C.

7. Calcolare $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx\,dy$ usando le coordinate polari, dove D è l'intersezione del cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1 e del semipiano $x \ge 1$.

8. Usando le formule di Green determinare l'integrale $\displaystyle\iint_C x dx\,dy$ trasformandolo in un integrale sulla frontiera di C, dove C è l'insieme dell'esercizio 6.

9. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(i\pi z)}{(z^2+1)^2}\,dz$, dove
(a) γ è la circonferenza di centro i e raggio 1;
(b) γ è la circonferenza di centro 0 e raggio 2.

10. Usando la trasformata di Laplace trovare la soluzione y di $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = e^x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza