COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA – A.A. 2009-10
Primo appello del 5/5/2010

Qui trovate le tracce delle soluzioni degli esercizi del compito. Ho tralasciato i calcoli da Analisi 1 (che comunque sono parte della risoluzione), concentrandomi invece sul procedimento da usare. Ho svolto più velocemente gli esercizi che non hanno dato grandi problemi, e con più dettaglio gli altri (in particolare il numero 8, in cui la difficoltà incontrata da molti è stata quella di parametrizzare la frontiera di C).

1. *Calcolare il limite* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy - y\sin x}{x^2+y^2}$.

Si ha $\sin xy = xy + o(xy)$, $y\sin x = y(x+o(x))$, per cui

$$\frac{\sin xy - y\sin x}{x^2+y^2} = \frac{o(xy)}{x^2+y^2} = \frac{o(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = o(1),$$

(dato che $|xy| \leq x^2+y^2$; questo si vede facilmente passando per esempio alle coordinate polari: $\rho|\cos\theta\sin\theta| \leq \rho^2$) e il limite fa 0.

Errore frequente (da Analisi 1): non si può scrivere

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy - y\sin x}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2} - \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin x}{x^2+y^2}$$

(e poi procedere con i limiti notevoli), dato che questi limiti non esistono.

2. *Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione* $f(x,y) = e^{x+y}\log|x-y+1| + \sin(\pi x/y)$ *nel punto* $(1,1)$.

Basta calcolare il gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y}\log|x-y+1| + e^{x+y}\frac{1}{x-y+1} + \cos(\pi x/y)\frac{\pi}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y}\log|x-y+1| - e^{x+y}\frac{1}{x-y+1} - \cos(\pi x/y)\frac{\pi x}{y^2}$$

per cui il piano tangente è

$$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) = 0 + (e^2-\pi)(x-1) + (-e^2+\pi)(y-1),$$

ovvero

$$z = (e^2-\pi)x - (e^2-\pi)y\,.$$

3. *Sia* $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sin t, \cos t)$. *Calcolare* $\displaystyle\int_\gamma (y\,dx - x\,dy)$.

Si ha $dx = \cos t\,dt$, $dy = -\sin t\,dt$, per cui

$$\int_\gamma (y\,dx - x\,dy) = \int_0^\pi (\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \int_0^\pi 1\,dt = \pi.$$

4. *Sia* $\omega = \Big(p^2 x e^{x^2+y} + \cos(x+y^2)\Big)\,dx + \Big(e^{x^2+y} + p^2 y \cos(x+y^2)\Big)\,dy$.
Dire per quali valori del parametri p è una forma esatta e calcolarne un potenziale.

Dato che il dominio di ω è semplicemente connesso basta imporre che ω sia chiusa. Tale condizione da' $p = \pm\sqrt{2}$. Un potenziale è semplicemente

$$U(x,y) = \int \Big(2xe^{x^2+y} + \cos(x+y^2)\Big)\,dx = e^{x^2+y} + \sin(x+y^2).$$

5. *Dire per quali punti (x,y) l'espressione $x^4y^2 + x^3y^3 - xy = 0$ non definisce una funzione implicita $y = \varphi(x)$ in un intorno di (x,y). Calcolare φ' in uno degli altri punti a scelta con $xy \neq 0$.*

La condizione perché $g(x,y) = c$ definisca implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ è che $\frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$, e in tal caso si ha $\varphi'(x) = -\frac{\partial g}{\partial x} / \frac{\partial g}{\partial x}$.

Nel nostro caso conviene notare che l'espressione $x^4y^2 + x^3y^3 - xy = 0$ equivale a

$$xy(x^3y + x^2y^2 - 1) = 0,$$

per cui è più semplice studiare separatamente $xy = 0$ (che sono gli assi cartesiani) e $g(x,y) = x^3y + x^2y^2$.

Dobbiamo vedere se esistono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ g(x,y) = 1 \end{cases} = \begin{cases} x^3 + 2x^2y = 0 \\ x^3y + x^2y^2 = 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2(x+2y) = 0 \\ x^3y + x^2y^2 = 1 \end{cases},$$

ovvero

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^3y + x^2y^2 = 1 \end{cases}, \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x = -2y \\ x^3y + x^2y^2 = 1 \end{cases}.$$

Si vede facilmente che nessuno dei due sistemi ha soluzione.

Rimane così da discutere $xy = 0$. I punti in cui tale relazione non da' una funzione $y = \varphi(x)$ sono i punti dell'asse delle y (ovvero per $x = 0$).

Errore frequente: imporre la condizione $\nabla g \neq 0$ (che da' $x = y = 0$). Questa condizione assicura che $g(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ **oppure** $x = \varphi(y)$ (cosa non richiesta dall'esercizio).

6. *Sia* $C = \{(x,y) : x^2 \le y \le \sqrt{|x|}\}$*. Disegnare* C*. Calcolare massimi e minimi di* $f(x,y) = x + 2y - 3$ *su* C *usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e calcolando* ∇f *nei punti angolosi della frontiera di* C*.*

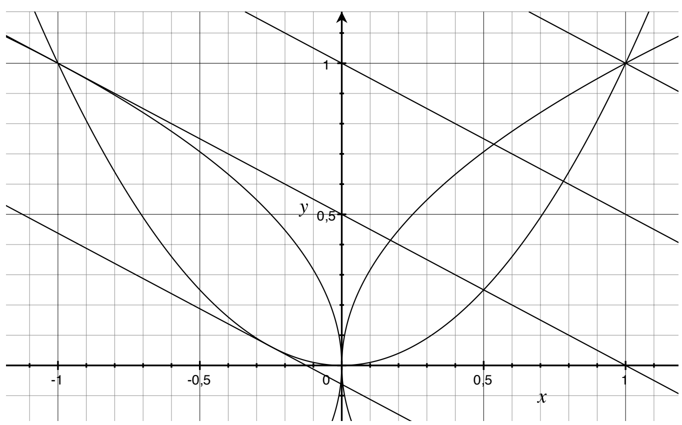
Per disegnare C basta tracciare il grafico di $y = x^2$, $x = y^2$ e $x = -y^2$ (ovvero i vincoli $g(x,y) = 0$, dove $g(x,y) = y - x^2$, $g(x,y) = x - y^2$ e $g(x,y) = x + y^2$ rispettivamente) , e considerare le due regioni limitate del piano delimitate dalle tre curve.

Dato che $\nabla f = (1,2)$ (quindi in particolare f non ha minimi liberi dato che ∇f non si annulla mai) l'applicazione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange da' i sistemi

$$\begin{cases} -2x = \lambda \\ 1 = 2\lambda \\ y - x^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = \lambda \\ -2y = 2\lambda \\ x - y^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = \lambda \\ 2y = 2\lambda \\ x + y^2 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo questi sistemi si trovano le due soluzioni ammissibili $(-1,1)$ e $(-1/4, 1/16)$ (la terza $(1,-1)$ non appartiene a C).

Per vedere se questi punti sono massimi o minimi bisogna vedere la direzione di ∇f (o equivalentemente tracciare le linee di livello di f). Se ne deduce che il primo è un punto di massimo relativo, il secondo di minimo (assoluto) (qui ∇f punta all'interno di C). Si deve anche discutere il punto angoloso $(1,1)$ che risulta essere il punto di massimo assoluto (qui ∇f punta all'esterno di C). L'analisi è riassunta in figura.



7. *Calcolare* $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$ *usando le coordinate polari, dove* D *è l'intersezione del cerchio di centro* $(1,0)$ *e raggio* 1 *e del semipiano* $x \ge 1$*.*

Due possibili soluzioni:

(a) Usando le coordinate di centro $(0,0)$ i vincoli

$$x \ge 1, \qquad (x-1)^2 + y^2 \le 1 \text{ (ovvero } x^2 + y^2 - 2x \le 0)$$

diventano

$$\rho \geq \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \rho \leq 2\cos\theta.$$

Si ha $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$, per cui l'integrale diventa

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_{1/\cos\theta}^{2\cos\theta}\frac{1}{\rho}\cdot\rho\,d\rho\,d\,\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_{1/\cos\theta}^{2\cos\theta} 1\,d\rho\,d\,\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\Big(2\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta}\Big)\,d\,\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\cos\theta\,d\,\theta - \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}\,d\,\theta$$

che si risolvono elementarmente (con la sostituzione $s = \sin\theta$ il secondo).

Errore frequente: non indicare l'intervallo corretto $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$, che si deduce facilmente disegnando D, oppure risolvendo la disequazione

$$\frac{1}{\cos\theta} \leq 2\cos\theta$$

(che determina i θ per cui il dominio non è vuoto).

(b) Alternativamente, usando le coordinate di centro (1,0) i vincoli sono più semplici:

$$-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, \qquad 0 \leq \theta \leq 1,$$

e danno l'integrale

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\rho^2+2\rho\cos\theta+1}}\cdot\rho\,d\rho\,d\,\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{(\rho+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}}\,d\rho\,d\,\theta,$$

che è un po' più laborioso.

Per i dettagli sui calcoli dell'integrazione rivedere Analisi 1.

8. *Usando le formule di Green determinare l'integrale* $\iint_C x\,dxdy$ *trasformandolo in un integrale sulla frontiera di* C*, dove* C *è l'insieme dell'esercizio* 6.

Si può usare la formula di Green

$$\iint_C f_x dx\,dy = \int_{\partial C} f\,dy,$$

dove ∂C è parametrizzata in senso antiorario. Nel nostro caso possiamo prendere

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2}.$$

Consideriamo la parte C_+ di C nel primo quadrante. Possiamo scrivere

$$\int_{\partial C_+} f\,dy = \int_{\gamma_1} \frac{x^2}{2}\,dy - \int_{\gamma_2} \frac{x^2}{2}\,dy,$$

dove $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ sono definite da

$$\gamma_1(t) = (t, t^2), \qquad \gamma_2(t) = (t^2, t).$$

Il segno meno tiene conto che γ_2 percorre ∂C in senso orario. Si ha allora

$$\int_{\partial C_+} f\,dy = \int_0^1 \frac{t^2}{2}\,d(t^2) - \int_0^1 \frac{t^4}{2}\,dt = \int_0^1 t^3\,dt - \int_0^1 \frac{t^4}{2}\,dt$$

(che si integra elementarmente).

Analogamente si tratta la parte C_- di C nel secondo quadrante

$$\int_{\partial C_-} f\,dy = \int_{\gamma_3} \frac{x^2}{2}\,dy + \int_{\gamma_4} \frac{x^2}{2}\,dy,$$

dove $\gamma_3 : [-1,0] \to \mathbb{R}^2$, , $\gamma_4 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ sono definite da

$$\gamma_3(t) = (t, t^2), \qquad \gamma_4(t) = (-t^2, t).$$

Dunque

$$\int_{\partial C_+} f\,dy = \int_{-1}^0 \frac{t^2}{2}\,d(t^2) + \int_0^1 \frac{t^4}{2}\,dt = \int_{-1}^0 t^3\,dt + \int_0^1 \frac{t^4}{2}\,dt = -\int_{\partial C_+} f\,dy$$

Il risultato finale è 0, come si deduce anche facilmente dalla simmetria di C e della funzione integranda x.

9. *Calcolare* $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(i\pi z)}{(z^2+1)^2}\,dz$, *dove*

(a) γ *è la circonferenza di centro* i *e raggio* 1*;*

(b) γ *è la circonferenza di centro* 0 *e raggio* 2

(le circonferenze si intendono percorse in senso antiorario).

Basta usare il teorema di residui. La funzione ha due poli doppi in $\pm i$, quindi nel caso (a) si deve considerare solo il residuo in i, e nel caso (b) tutti e due i residui.

Il calcolo del residuo è ottenuto dalla formula

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,i) &= \lim_{z\to i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-i)^2 \frac{\sin(i\pi z)}{(z^2+1)^2} = \lim_{z\to i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{\sin(i\pi z)}{(z+i)^2} \\ &= \Big(\frac{\cos(i\pi z) i\pi}{(z+i)^2} - 2\frac{\sin(i\pi z)}{(z+i)^3}\Big)_{z=i} = \frac{\cos(-\pi) i\pi}{-4} = \frac{i\pi}{4},\end{aligned}$$

per cui il primo integrale è $2\pi i \times \frac{i\pi}{4} = -\frac{\pi^2}{2}$.

Per (b) il conto è analogo e il risultato $-\pi^2$.

10. *Usando la trasformata di Laplace trovare la soluzione y di* $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = e^x \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1 \end{cases}$

Applicando ad entrambi i membri la trasformata di Laplace si ottiene l'equazione (nell'incognita $Y = \mathcal{L}[y]$)

$$s^2 Y - 1 + 3sY + 2Y = \frac{1}{s-1},$$

ovvero

$$Y = \frac{1}{(s-1)(s^2+3s+2)} + \frac{1}{(s^2+3s+2)}.$$

Scrivendo questa espressione in fratti semplici si ha

$$Y = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+2}$$

da cui (ricordando che $\frac{1}{s-\alpha} = \mathcal{L}[e^{\alpha x}]$)

$$y = \frac{1}{6}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{2}{3}e^{-2x}$$