Soluzioni

1. Calcolare la somma della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^{2n}}.$$

R. La serie può essere riscritta nel modo seguente:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n}.$$

Il numero 2 può essere raccolto fuori dal segno di sommatoria:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^{2n}} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{n}.$$

Si tratta di una serie geometrica di ragione $\frac{4}{9}$ con l'indice n che parte da 1. Dato che $|\frac{4}{9}| < 1$ la serie è convergente e la somma vale:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^{2n}} = 2 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{n} - 1\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{4}{9}} - 1\right) = \frac{8}{5}.$$

— ◇ —

2. Calcolare la somma della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^n - 2 \cdot 5^n}{20^{n-1}}.$$

R. La serie può essere riscritta nel modo seguente:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(3 \cdot \frac{4^n}{20^{n-1}} - 2 \cdot \frac{5^n}{20^{n-1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3 \cdot 4}{5^{n-1}} - \frac{2 \cdot 5}{4^{n-1}}\right).$$

Per la linearità possiamo scomporre la serie in due serie geometriche convergenti:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(3 \cdot \frac{4^n}{20^{n-1}} - 2 \cdot \frac{5^n}{20^{n-1}}\right) = 12 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 10 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{12}{1-\frac{1}{5}} - \frac{10}{1-\frac{1}{4}} = \frac{5}{3}.$$

— ◇ —

3. Determinare la frazione corrispondente al numero decimale
$$0.7\overline{4} = 0.74444\cdots.$$

R. Basta scrivere il numero come somma di una serie geometrica:
$$0.7\overline{4} = \frac{7}{10} + 4 \cdot 0.0\overline{1} = \frac{7}{10} + 4 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{7}{10} + 4 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{67}{90}.$$

— ⋄ —

4. Calcolare la somma della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

R. La serie può essere riscritta nel modo seguente
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right).$$
Per il criterio di Leibnitz, non solo possiamo dire che la serie converge, ma possiamo anche applicare la linearità ottenendo la scomposizione
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.$$
La prima serie ha somma uguale a $\log 2$. La seconda serie può essere ricondotta alla prima "aggiustando" l'indice della sommatoria:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n}=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}+1=-\log 2+1.$$
Quindi la somma della serie data è uguale a
$$\log 2+(-\log 2+1)=1.$$

— ⋄ —

5. Calcolare la somma della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}.$$

R. Osserviamo che
$$\frac{2}{n^2-1}=\frac{2}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$$
e quindi la somma parziale s_N per $N\geq 3$ diventa
$$\begin{aligned} s_N &= \sum_{n=2}^{N}\frac{2}{n^2-1}=\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n-1}-\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n+1}\\ &= \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}-\sum_{n=3}^{N+1}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}.\end{aligned}$$
Passando al limite per $N\to\infty$ troviamo che la somma della serie data vale $3/2$.

— ◇ —

6. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 - n^3 \sin \frac{1}{n}\right)^n .$$

R. Ricordando che $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ per x che tende a 0 allora

$$\frac{x - \sin x}{x^3} \to \frac{1}{6}.$$

Quindi, notando che la serie è a termini non negativi e ponendo $x = 1/n$ si ha che

$$\sqrt[n]{a_n} = n^2 - n^3 \sin \frac{1}{n} = n^3 \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{6}$$

Dato che $|\frac{1}{6}| < 1$, la serie converge per il criterio della radice.

— ◇ —

7. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(\sin n))^n .$$

R. Intanto osserviamo che i termini non sono di segno costante (il primo termine negativo si ha per $n = 4$). Notiamo anche che qualunque sia il valore di n

$$\arctan(\sin n) \in \arctan([-1, 1]) = [-\pi/4, \pi/4],$$

e dunque

$$|\arctan(\sin n)|^n \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^n .$$

Questo vuol dire che la serie dei valori assoluti è maggiorata dalla serie geometrica convergente di ragione $0 < \pi/4 < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n .$$

Dunque, per il criterio del confronto, la serie data converge assolutamente (e quindi è convergente).

— ◇ —

8. Trovare il dominio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^n$$

e determinarne la somma per $x=\frac{1}{4}$.

R. Se poniamo $y = x/(x-1)$ allora, nella variabile y, la serie diventa una serie geometrica di ragione y. Questa converge se e solo se $|y|<1$ e la somma vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} y^n - 1 = \frac{1}{1-y} - 1 = \frac{y}{1-y}.$$

Quindi il dominio di convergenza della serie data è determinato dalla disuguaglianza

$$\left|\frac{x}{x-1}\right| < 1$$

ossia $x \in D = (-\infty, \frac{1}{2})$. Per $x=\frac{1}{4}$ si ha che $y=-\frac{1}{3}$ e la somma della serie è uguale a $-\frac{1}{4}$.

— ◇ —

9. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-(-2)^n}{6^n}.$$

R. La serie data può essere riscritta nel modo seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-(-2)^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n}{6^n}-\frac{(-2)^n}{6^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

Quindi, per la linearità, la serie può essere decomposta nella differenza di due serie geometriche convergenti:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-(-2)^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1\right) - \left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}}-1\right) = \frac{5}{4}.$$

— ◇ —

10. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+(-5)^n}{n5^n}.$$

R. La serie data può essere riscritta nel modo seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} + \frac{(-1)^n}{n} \right).$$

Per la linearità, la serie può essere così decomposta nella differenza di due serie convergenti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + (-5)^n}{n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}} - 1 \right) - \log 2 = \frac{1}{4} - \log 2.$$

— ◇ —

11. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2 + \log n}{n^a \log(n+1)}}$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.
R. I termini della serie sono non negativi e facendo un'analisi asintotica abbiamo che

$$\sqrt{\frac{n^2 + \log n}{n^a \log(n+1)}} \sim \left(\frac{n^2}{n^a \log n} \right)^{\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{n^{\frac{a-2}{2}} (\log n)^{\frac{1}{2}}}.$$

La serie data è quindi asintoticamente equivalente a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{a-2}{2}} (\log n)^{\frac{1}{2}}}$$

che converge se e solo se $\alpha = \frac{a-2}{2} > 1$ ($\beta = \frac{1}{2} \leq 1$). Possiamo così concludere che la serie data converge per $a > 4$.

— ◇ —

12. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n^4 + n^3) - 4 \log n}{n^a \left(\log(n! + n^n) \right)^2}$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

R. Intanto osserviamo che

$$\log(n^4 + n^3) - 4 \log n = \log(n^4 + n^3) - \log(n^4) = \log \left(\frac{n^4 + n^3}{n^4} \right) = \log \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

La serie data può essere quindi riscritta nel modo seguente:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^a \left(\log(n!+n^n)\right)^2}.$$

I termini della serie sono non negativi e possiamo fare un'analisi asintotica ricordando che $\log(1+x) \sim x$ per x che tende a 0:

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^a \left(\log(n!+n^n)\right)^2} \sim \frac{\frac{1}{n}}{n^a(n\log n)^2} \sim \frac{1}{n^{a+3}(\log n)^2}.$$

La serie data è quindi asintoticamente equivalente a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{a+3}(\log n)^2}$$

che converge se e solo se $\alpha = a+3 \geq 1$ $(\beta = 2 > 1)$. Possiamo così concludere che la serie data converge per $a \geq -2$.

— ⋄ —

13. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n\left(e^{1/n^{5a}} - \cos(1/n^{2a})\right)}{\log\left((n\log n)^n + n^{n\log n}\right)}$$

al variare del parametro $a > 0$.

R. Prima osserviamo che

$$(n\log n)^n + n^{n\log n} = e^{n(\log n + \log\log n)} + e^{n(\log n)^2} \sim e^{n(\log n)^2}$$

e

$$2n\left(e^{1/n^{5a}} - \cos(1/n^{2a})\right) \sim 2n\left((1+1/n^{5a}) - (1-1/2n^{4a})\right) \sim 1/n^{4a-1}.$$

I termini della serie sono positivi e facendo l'analisi asintotica otteniamo

$$\frac{2n\left(e^{1/n^{5a}} - \cos(1/n^{2a})\right)}{\log\left((n\log n)^n + n^{n\log n}\right)} \sim \frac{1/n^{4a-1}}{\log\left(e^{n(\log n)^2}\right)} \sim \frac{1}{n^{4a}(\log n)^2}.$$

Dunque la serie converge se e solo se $\alpha = 4a \geq 1$ $(\beta = 2 > 1)$ ossia per $a \geq 1/4$.

— ⋄ —

14. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+3^n)^2+5^n}{(1+5^n)^2+9^n} \cdot x^n.$$

R. Facciamo l'analisi asintotica del coefficiente

$$a_n = \frac{(1+3^n)^2+5^n}{(1+5^n)^2+9^n} = \frac{(1+2\cdot 3^n+9^n)+5^n}{(1+2\cdot 5^n+25^n)+9^n} \sim \frac{9^n}{25^n}.$$

Quindi il raggio di convergenza è uguale a 25/9 perché:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \to \frac{9}{25}.$$

— ◇ —

15. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot x^n.$$

R. Analizziamo il rapporto dei coefficienti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \sim \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4}.$$

Quindi il raggio di convergenza è uguale a 4.

— ◇ —

16. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^n \cdot n!}{(2n)!} \cdot x^n.$$

R. Analizziamo il rapporto dei coefficienti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3(n+1))^{n+1} \cdot (n+1)!}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(3n)^n \cdot n!} = \frac{3(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n}.$$

La prima frazione tende a $3/4$ mentre la seconda si riduce a $(1+1/n)^n$ e quindi tende ad e. Così il raggio di convergenza della serie è uguale a $4/3e$.

— ◇ —

17. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2} \cdot x^{4n}.$$

R. Poniamo $y = x^4$. Allora il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2} \cdot y^n.$$

è dato dal reciproco del limite di

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n \sim \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \to e^{-2}$$

ossia e^2. Siccome $y = x^4$, il raggio di convergenza della serie data è

$$\sqrt[4]{e^2} = \sqrt{e}.$$

— ⋄ —

18. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(n+5)! + 6(n+1)!}{(n+5)! + 4(n+2)!}\right)^{n^4} \cdot x^n .$$

R. Calcoliamo il limite

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{1 + \dfrac{6(n+1)!}{(n+5)!}}{1 + \dfrac{4(n+2)!}{(n+5)!}}\right)^{n^4/n} \sim \frac{\left((1+6/n^4)^{n^4}\right)^{1/n}}{(1+4/n^3)^{n^3}} \sim \frac{e^{6/n}}{e^4} \to \frac{1}{e^4} .$$

Quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è e^4.

— ⋄ —

19. Determinare il dominio della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \cdot \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right) \cdot x^n.$$

R. Intanto osserviamo che $(-1)^{n^2} = (-1)^n$ perché l'intero n è pari se e solo è pari il suo quadrato (provate a dimostrarlo). Se calcoliamo anche la differenza delle radici, allora la serie data può essere riscritta nel seguente modo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \cdot x^n.$$

Dato che

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right|} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n+1}}} \sim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1,$$

il raggio di convergenza è uguale a 1 e così $(-1,1) \subset D \subset [-1,1]$. Vediamo cosa succede agli estremi: per $x = 1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

e quindi converge per il criterio di Leibnitz. Per $x = -1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \cdot (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

Siccome il termine generico di questa serie a termini positivi è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{n}$ la serie non converge. Dunque $D = (-1, 1]$.

— ◇ —

20. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n}\right).$$

R. Si noti che il termine, a meno del fattore $(-1)^n$, è non negativo e infinitesimo, ma non è decrescente dunque non si può applicare il criterio di Leibnitz. Se provassimo ad applicare il confronto asintotico anche a questa serie che ha segno variabile avremmo che

$$\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ora siccome per il criterio di Leibnitz la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

converge allora saremmo tentati di dire che anche la serie data converge. Questa conclusione è però sbagliata perchè in realtà la serie data diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

infatti la prima serie converge per il criterio di Leibnitz mentre la seconda diverge.

— ◇ —

21. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 4^{n+1}}.$$

R. Riscriviamo opportunamente il termine della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 4^{n+1}} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Ora dalla tabella delle serie di potenze si ricava facilmente che

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n} \quad \text{con } x \in D = (-1, 1].$$

Quindi la serie in esame si ottiene ponendo $x = -\frac{3}{4}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 4^{n+1}} = \frac{1}{4} \cdot \left(-\log(1 - \frac{3}{4})\right) = \frac{\log 4}{4} = \frac{\log 2}{2}.$$

— ◇ —

22. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n - 2}{2^n}.$$

R. La serie data può essere riscritta nel modo seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{i}{2}\right)^n - \frac{1}{2^{n-1}} \right).$$

Per la linearità, la serie può essere così decomposta nella differenza di due serie geometriche convergenti ($|i/2| < 1$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n - 2}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{1 - \frac{i}{2}} - 1 \right) - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{-11 + 2i}{5}.$$

— ◇ —

23. Determinare il dominio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3n^2 + 4n + 5) \left(\log \left(\frac{e}{1 + |x|} \right) \right)^n.$$

R. Poniamo $y = \log(e/(1+|x|))$ e studiamo la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3n^2+4n+5)\cdot y^n.$$

Il raggio di convergenza è 1 perché

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{3n^2+4n+5} \sim \sqrt[n]{3n^2} \to 1.$$

Sia all'estremo $y = 1$ che $y = -1$ la serie non converge perché il termine generico non converge a zero. Quindi la serie converge se e solo se

$$-1 < y = \log(e/(1+|x|)) = 1 - \log(1+|x|) < 1,$$

ossia

$$0 < \log(1+|x|) < 2$$

e quindi

$$0 < |x| < e^2 - 1.$$

Dunque il dominio di convergenza della serie data è $D = (1-e^2, e^2-1) \setminus \{0\}$.

— ⋄ —

24. Determinare il dominio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2-(-1)^n}{2+(-1)^n}\cdot x^n.$$

Quanto vale la somma se x appartiene a tale dominio?

R. Si noti che

$$\frac{2-(-1)^n}{2+(-1)^n} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 3 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Calcoliamo il limite della successione $\sqrt[n]{|a_n|}$: anche se a_n oscilla tra i valori 3 e 1/3 la sua radice n-sima tende a 1. Inoltre nei punti $x = 1$ e $x = -1$ la serie non converge perché il termine generico non è infinitesimo. Quindi $D = (-1, 1)$. Se $|x| < 1$ allora

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2-(-1)^n}{2+(-1)^n}\cdot x^n = \frac{1}{3}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k} + 3\cdot\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k+1}$$

dove la prima e la seconda serie individuano la somma di tutti i termini rispettivamente di indice pari ($n = 2k$) e di indice dispari ($n = 2k+1$). Inoltre queste due serie sono riconducibili alla serie geometrica di ragione x^2: per la prima

$$\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(x^2)^k = \frac{1}{1-x^2},$$

mentre per la seconda

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1} = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k = \frac{x}{1-x^2}.$$

Quindi la somma della serie data per $|x| < 1$ è

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-x^2} + 3 \cdot \frac{x}{1-x^2} = \frac{1+9x}{3(1-x^2)}.$$

— ◇ —

25. Determinare il dominio di convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1+\frac{2}{n}\right) \cdot (1-|x|)^n.$$

R. Poniamo $y = 1 - |x|$ e studiamo la serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1+\frac{2}{n}\right) \cdot y^n.$$

Se analizziamo il coefficiente

$$a_n = \log\left(1+\frac{2}{n}\right) \sim \frac{2}{n}$$

e quindi il raggio di convergenza è 1 perché

$$\sqrt[n]{|a_n|} \sim \sqrt[n]{\frac{2}{n}} \to 1.$$

All'estremo $y = 1$, la serie è asintoticamente equivalente alla serie armonica e dunque diverge. All'altro estremo $y = -1$ invece la serie converge per il criterio di Leibnitz perché

$$\log\left(1+\frac{2}{n}\right) \text{ decresce e tende a } 0.$$

Quindi la serie converge se e solo se

$$-1 \leq y = 1 - |x| < 1, \text{ ossia } 0 < |x| \leq 2$$

e il dominio di convergenza della serie data è $D = [-2, 2] \setminus \{0\}$.

— ◇ —

26. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2/3)^n - (1+i)^n}{2^{n-1}}.$$

R. La serie data può essere riscritta nel modo seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1+i}{2}\right)^n \right).$$

Per la linearità, la serie si decompone nella differenza di due serie geometriche convergenti ($|(1+i)/2| < 1$):

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n = 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1\right) - 2\left(\frac{1}{1-\frac{1+i}{2}} - 1\right) = 1 - 2i.$$

— ◇ —

27. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \min\left(ne, \frac{4e}{n+1}\right) \frac{(-1)^n}{n!}.$$

R. Dato che

$$ne \leq \frac{4e}{n+1}$$

se e solo se

$$n(n+1) \leq 4$$

ossia per $n = 0$ e $n = 1$ allora

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \min\left(ne, \frac{4e}{n+1}\right) \frac{(-1)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{1} (ne)\frac{(-1)^n}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{4e}{n+1}\right) \frac{(-1)^n}{n!} \\
&= 0 - e + 4e \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \\
&= -e - 4e \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \\
&= -e - 4e \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{2} \frac{(-1)^n}{n!} \right) \\
&= -e - 4e \left(e^{-1} - \left(1 - 1 + \frac{1}{2}\right) \right) = e - 4.
\end{aligned}$$

— ◇ —

28. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}\,.$$

R. La serie può essere riscritta nel modo seguente

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{(n+1)}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} \right).$$

Dato che le serie relative ai due termini convergono possiamo separarli ottenendo

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}.$$

— ⋄ —

29. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(n^2-1)3^n - (n-1)!}{(n+1)!} \right).$$

R. La serie si può riscrivere come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!} \cdot 3^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

ovvero

$$3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 3e^3 - (e^3-1) - 1 = 2e^3.$$

— ⋄ —

30. Determinare il dominio di convergenza e la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{1+x} \right)^n.$$

R. Ponendo $y = x/(1+x)$ si osserva che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-y)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-y)^n}{n} = -\log(1-y)$$

con dominio di convergenza $[-1, 1)$ rispetto a y. Quindi il dominio rispetto a x è

$$-1 \leq \frac{x}{1+x} < 1$$

ossia $D = [-1/2, +\infty)$ e per $x \in D$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{1+x}\right)^n = -\log\left(1 - \frac{x}{1+x}\right) = -\log\left(\frac{1}{1+x}\right) = \log(1+x).$$

— ◇ —

31. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cos(n\pi/4))^2}{2^n}.$$

R. Notiamo che

$$(\cos(n\pi/4))^2 = \begin{cases} 1 & n = 4k \text{ per } k \geq 0 \\ 1/2 & n = 2k+1 \text{ per } k \geq 0 \\ 0 & n = 4k+2 \text{ per } k \geq 0 \end{cases}.$$

Quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cos(n\pi/4))^2}{2^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1/2}{2^{2k+1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{16}} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{16}{15} + \frac{1}{3} = \frac{7}{5}.$$

— ◇ —

32. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+5}{3^n}.$$

R. Per linearità la serie si può spezzare in due parti

$$2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{3^n} + 5\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n}.$$

Per quanto riguarda la prima serie ricordiamo che per $|x| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

e dunque

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}-\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{3}}{(1-\frac{1}{3})^2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}.$$

La somma della seconda serie vale

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{6}.$$

Infine

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+5}{3^n}=2\cdot\frac{5}{12}+5\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{3}.$$

— ◇ —

33. Determinare il dominio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\left(\frac{\sin(2x)+\cos(3x)}{x^2+1}\right)^{2n}.$$

R. Prima studiamo il dominio D_y della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\,y^n.$$

Calcolando

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{1}{4}$$

troviamo che il raggio di convergenza è 4 e quindi $(-4,4)\subset D_y\subset[-4,4]$.
Prima di analizzare cosa accade negli estremi vediamo se tale analisi sia effettivamente necessaria (in realtà $D_y=(-4,4)$ ma per provarlo serve l'approssimazione di Stirling). Notando che $|\sin(2x)+\cos(3x)|$ è sempre minore di 2 (provate a dimostrarlo) si ha che

$$0\le y=\left(\frac{\sin(2x)+\cos(3x)}{x^2+1}\right)^2<\frac{4}{(x^2+1)^2}\le 4.$$

ne segue che per ogni $x\in\mathbb{R}$ la y corrispondente sta in $(-4,4)$ e dunque anche in D_y. Quindi il dominio di convergenza richiesto è proprio $\mathbb{R}$.

— ◇ —

34. Sapendo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

calcolare

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

R. La somma data può essere spezzata rispetto agli indici pari e dispari:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{24} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

da cui otteniamo la somma della prima serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Per la seconda invece osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}.$$