Soluzioni

1. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx.$$

R. Procediamo effettuando il cambio di variabile $t=\sqrt{x}$ ossia

$$x=t^2 \quad \text{e} \quad dx=2t\,dt.$$

Quindi

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx=\int \frac{1}{t+t^2}\,2t\,dt=2\int \frac{1}{1+t}\,dt=2\log|1+t|+c$$

Se torniamo alla variabile x otteniamo

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx=2\log(1+\sqrt{x})+c.$$

— ⋄ —

2. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int (\log x)^2\,dx.$$

R. Integriamo per parti

$$\begin{aligned}\int (\log x)^2\,dx &= = x(\log x)^2-\int x\,d((\log x)^2)\\ &= x(\log x)^2-\int x\,\frac{2\log x}{x}\,dx\\ &= x(\log x)^2-2\int \log x\,dx.\end{aligned}$$

Ricordando che una primitiva di $\log x$ è $x\log x-x$ si ha che

$$\int (\log x)^2\,dx=x(\log x)^2-2(x\log x-x)+c=x((\log x-1)^2+1)+c.$$

— ⋄ —

3. Sia F la primitiva di

$$f(x)=e^{|x|}$$

tale che $F(1)=e$. Determinare $F(-1)$.

R. Per $x \geq 0$ abbiamo che

$$\int e^{|x|}\,dx = \int e^x\,dx = e^x + c_1,$$

mentre per $x \leq 0$

$$\int e^{|x|}\,dx = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + c_2,$$

Le primitive di $e^{|x|}$ per $x \in \mathbb{R}$ sono funzioni continue e dunque devono coincidere nel punto di raccordo $x = 0$. Questo accade se $1 + c_1 = -1 + c_2$ ossia se $c_2 = 2 + c_1$. Quindi

$$\int e^{|x|}\,dx = \begin{cases} e^x + c & \text{per } x \geq 0 \\ -e^{-x} + 2 + c & \text{per } x < 0 \end{cases}.$$

La primitiva F tale che $F(1) = e^1 + c = e$ si ottiene per $c = 0$, dunque $F(-1) = -e^{-(-1)} + 2 + c = -e + 2$.

— ◇ —

4. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \sin(3x)\,e^{2x}\,dx.$$

R. Spostiamo il fattore e^{2x} nel differenziale e integriamo per parti per due volte

$$\begin{aligned}
\int \sin(3x)\,e^{2x}\,dx &= \int \sin(3x)\,d\left(\frac{e^{2x}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sin(3x)\,e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,d(\sin(3x)) \\
&= \frac{1}{2}\sin(3x)e^{2x} - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos(3x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\sin(3x)e^{2x} - \frac{3}{2}\int \cos(3x)\,d\left(\frac{e^{2x}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sin(3x)e^{2x} - \frac{3}{4}\cos(3x)e^{2x} + \frac{3}{4}\int e^{2x}\,d(\cos(3x)) \\
&= \frac{1}{2}\sin(3x)e^{2x} - \frac{3}{4}\cos(3x)e^{2x} - \frac{9}{4}\int \sin(3x)e^{2x}\,dx\,.
\end{aligned}$$

Ora che l'integrale rimasto coincide con quello iniziale conviene agire algebricamente spostando gli integrali tutti a sinistra e aggiungendo la costante arbitraria a destra:

$$\left(1 + \frac{9}{4}\right)\int \sin(3x)\,e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\sin(3x)e^{2x} - \frac{3}{4}\cos(3x)e^{2x} + c,$$

e quindi

$$\int \sin(3x)\,e^{2x}\,dx = \frac{1}{13}\,e^{2x}\,\left(2\sin(3x) - 3\,\cos(3x)\right) + c.$$

Si noti che la divisione di c per $13/4$ è comunque una costante arbitraria che indichiamo ancora con la lettera c.

— ◇ —

5. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int x \cos x \, e^x \, dx.$$

R. Spostiamo il fattore e^x nel differenziale e integriamo per parti

$$\begin{aligned}\int x \cos x \, e^x \, dx &= \int x \cos x \; d(e^x) = x \cos x \, e^x - \int e^x \, (\cos x - x \sin x) \; dx \\ &= x \cos x \, e^x - \int \cos x \, e^x \, dx + \int x \sin x \, e^x \, dx.\end{aligned}$$

Ora calcoliamo separatamente l'ultimo integrale

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, e^x \, dx &= \int x \sin x \; d(e^x) = x \sin x \, e^x - \int e^x \, (\sin x + x \cos x) \; dx \\ &= x \sin x \, e^x - \int \sin x \, e^x \, dx - \int x \cos x \, e^x \, dx.\end{aligned}$$

Quindi riassumendo:

$$\int x \cos x \, e^x \, dx = \frac{1}{2} \left[x(\cos x + \sin x) \, e^x - \int \sin x \, e^x \, dx - \int \cos x \, e^x \, dx \right].$$

I due integrali rimasti si possono determinare con la stessa tecnica:

$$\begin{aligned}\int \cos x \, e^x \, dx &= \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) \, e^x + c_1 \\ \int \sin x \, e^x \, dx &= \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) \, e^x + c_2.\end{aligned}$$

Ora possiamo finalmente scrivere l'integrale cercato

$$\int x \cos x \, e^x \, dx = \frac{1}{2} \left[x(\cos x + \sin x) \, e^x - \sin x \, e^x \right] + c.$$

— ◇ —

6. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int x^8 \, \log x \, dx.$$

R. Procediamo per parti integrando prima il fattore x

$$\begin{aligned}\int x^8 \, \log x \, dx &= \int \log x \, d\left(\frac{x^9}{9}\right) = \frac{x^9}{9} \, \log x - \int \frac{x^9}{9} \, d(\log x) \\ &= \frac{x^9}{9} \, \log x - \frac{1}{9} \int x^9 \, \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^9}{9} \, \log x - \frac{1}{9} \int x^8 \, dx \\ &= \frac{x^9}{9} \, \log x - \frac{x^9}{81} + c.\end{aligned}$$

— ◇ —

7. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx.$$

R. Integrando prima il fattore $1/x$ otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx &= \int \sqrt{1+\log x}\,d(\log x)\\ &= \int (1+\log x)^{\frac{1}{2}}\,d(1+\log x) = \frac{2}{3}(1+\log x)^{3/2} + c.\end{aligned}$$

— ◇ —

8. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \arctan x\,dx.$$

R. Procediamo per parti

$$\int \arctan x\,dx = x\ \arctan x - \int x\,d(\arctan x) = x\ \arctan x - \int x\,\frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Ora risolviamo a parte l'integrale rimasto

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,d(1+x^2) = \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c.$$

Quindi

$$\int \arctan x\,dx = x\ \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c.$$

— ◇ —

9. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{x^2+4x+5}{x^2-1}\,dx.$$

R. Possiamo intanto fare la divisione (i polinomi hanno lo stesso grado)

$$\frac{x^2+4x+5}{x^2-1} = 1 + \frac{4x+6}{x^2-1}$$

così

$$\int \frac{x^2+4x+5}{x^2-1}\,dx = x + \int \frac{4x+6}{x^2-1}\,dx.$$

Ora calcoliamo l'integrale rimasto. La fattorizzazione completa del polinomio al denominatore è

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

e dunque la decomposizione è

$$\frac{4x+6}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

dove A e B sono costanti da determinare. Svolgendo i calcoli

$$\frac{4x+6}{x^2-1} = \frac{(A+B)x + (B-A)}{x^2-1}$$

e si ricava facilmente che $A = -1$ e $B = 5$. Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+4x+5}{x^2-1}\,dx &= x + \int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{5}{x-1}\right) dx \\ &= x - \log|x+1| + 5\log|x-1| + c \\ &= x + \log\frac{|x-1|^5}{|x+1|} + c.\end{aligned}$$

— $\diamond$ —

10. Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)^2}\,dx.$$

R. Il polinomio al denominatore è già fattorizzato e la decomposizione è

$$\frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

dove A, B, C e D sono costanti da determinare. Svolgiamo i calcoli

$$\frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{(A+C)x^3 + (2A+B+C+D)x^2 + (A+2B)x + B}{x^2(x+1)^2}$$

e dunque

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ 2A + B + C + D = 0 \\ A + 2B = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che $A = -2$, $B = 1$, $C = 2$ e $D = 1$. Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2(x+1)^2}\,dx &= \int \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx \\ &= -2\log|x| - \frac{1}{x} + 2\log|x+1| - \frac{1}{x+1} + c \\ &= 2\log\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + c.\end{aligned}$$

e l'integrale definito richiesto è

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \left[2\log\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right]_1^2 = 2\log\frac{3}{4} + \frac{2}{3}.$$

— ◇ —

11. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx.$$

R. Il polinomio al denominatore è già fattorizzato e la decomposizione è

$$f(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}.$$

Dato che la molteplicità degli zeri del denominatore è 1 possiamo determinare le costanti A, B e C nel seguente modo:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x\to-1}(x+1)\cdot f(x) = \lim_{x\to-1}\frac{x^2+2x-1}{(x+2)(x+3)} = -1,\\ B &= \lim_{x\to-2}(x+2)\cdot f(x) = \lim_{x\to-2}\frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x+3)} = 1,\\ C &= \lim_{x\to-3}(x+3)\cdot f(x) = \lim_{x\to-3}\frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x+2)} = 1. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right) dx\\ &= \left[-\log|x+1| + \log|x+2| + \log|x+3|\right]_0^1\\ &= \left[\log\left|\frac{(x+2)(x+3)}{x+1}\right|\right]_0^1 = \log 6 - \log 6 = 0. \end{aligned}$$

— ◇ —

12. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

R. Il polinomio al denominatore è già fattorizzato e la decomposizione è

$$\frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{Cx+D}{(1+x^2)^2}$$

dove A, B, C e D sono costanti da determinare. Svolgiamo i calcoli

$$\frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2} = \frac{Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D)}{(1+x^2)^2}$$

e dunque

$$\begin{cases} A=0 \\ B=1 \\ A+C=-2 \\ B+D=5 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che $A=0$, $B=1$, $C=-2$ e $D=4$. Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2}\,dx &= \int \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} + \frac{4}{(1+x^2)^2}\right)dx \\ &= \arctan x + \frac{1}{1+x^2} + 4\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx. \end{aligned}$$

Calcoliamo l'integrale che rimane per parti

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx \\ &= \int \left(\frac{1}{1+x^2} - x\cdot\frac{x}{(1+x^2)^2}\right)dx \\ &= \arctan x + \frac{1}{2}\int x\,d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= \arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + c. \end{aligned}$$

Così

$$\int \frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2}\,dx = 3\arctan x + \frac{1+2x}{1+x^2} + c$$

e l'integrale definito richiesto è

$$\int_0^1 \frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2}\,dx = \left[3\arctan x + \frac{1+2x}{1+x^2}\right]_0^1 = \frac{3\pi+2}{4}.$$

— ⋄ —

13. Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^e \frac{1}{x(3+\log x)^2}\,dx.$$

R. Per $x > 0$, integriamo prima $1/x$ e poi aggiungiamo 3 nel differenziale

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(3+\log x)^2}\,dx &= \int \frac{1}{(3+\log x)^2}\,d(\log x)\\ &= \int \frac{1}{(3+\log x)^2}\,d(3+\log x) = -\frac{1}{3+\log x} + c.\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_1^e \frac{1}{x(3+\log x)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{3+\log x}\right]_1^e = \frac{1}{12}.$$

— ◇ —

14. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

R. Effettuiamo il cambio di variabile

$$x = \sin t \quad \text{e} \quad dx = \cos t\,dt.$$

Invece di calcolare prima la primitiva e poi l'integrale definito proviamo a trasformare direttamente l'intervallo di integrazione:

$$x \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \stackrel{t=\arcsin x}{\longrightarrow} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$

Quindi

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 t}{\cos t}\,\cos t\,dt = \int_0^{\pi/3} \sin^3 t\,dt.$$

Ora proseguiamo il calcolo osservando che $\sin^3 t = \sin t\,(1-\cos^2 t)$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3} \sin^3 t\,dt &= \int_0^{\pi/3} \sin t\,(1-\cos^2 t)\,dt = \int_0^{\pi/3} (1-\cos^2 t)\,d(-\cos t)\\ &= \int_0^{\pi/3} (\cos^2 t - 1)\,d(\cos t) = \left[\frac{\cos^3 t}{3} - \cos t\right]_0^{\pi/3} = \frac{5}{24}.\end{aligned}$$

— ◇ —

15. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx.$$

R. Ricordando che $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ ne segue che

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)).$$

Quindi

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) \, dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin(2x)}{2} \right) + c$$

e

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

— ◇ —

16. Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tan(x/2) + x^2}{2x^2 - 8} \, dx.$$

R. Possiamo dividere l'integrale in due parti

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tan(x/2)}{2x^2 - 8} \, dx + \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2x^2 - 8} \, dx.$$

Nel primo integrale la funzione è dispari e l'intervallo è simmetrico rispetto a 0 e quindi

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tan(x/2)}{2x^2 - 8} \, dx = 0.$$

Nel secondo integrale la funzione è pari e l'intervallo è simmetrico rispetto a 0 e quindi

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2x^2 - 8} \, dx = 2 \int_0^1 \frac{x^2}{2x^2 - 8} \, dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 - 4} \, dx.$$

Continuiamo lo svolgimento del secondo integrale

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 - 4} \, dx &= \int_0^1 \left(1 + \frac{4}{x^2 - 4} \right) dx = [x]_0^1 + \int_0^1 \frac{4}{(x-2)(x+2)} \, dx \\
&= 1 + \int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx = 1 + \left[\log \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \right]_0^1 = 1 - \log 3.
\end{aligned}$$

Dunque

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tan(x/2) + x^2}{2x^2 - 8} \, dx = 1 - \log 3.$$

— ◇ —

17. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\sin^2 x + \cos^2 x}\, dx.$$

R. Raccogliendo $\cos^2 x$ al denominatore, l'integrale diventa

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\sin^2 x + \cos^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\tan^2 x + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx.$$

Quindi integriamo il fattore $1/\cos^2 x$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\sin^2 x + \cos^2 x}\, dx &= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 x + \frac{1}{3}}\, d(\tan x) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\Big[\arctan(\sqrt{3}\tan x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

— ◇ —

18. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\, 2^x}{|x|} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1}^{2} f(x)\, dx.$$

R. La funzione da integrare è continua in $[-1, 2] \setminus \{0\}$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

e quindi conviene dividere l'intervallo di integrazione rispetto al punto di discontinuità

$$\int_{-1}^{2} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{2} f(x)\, dx = -\int_{-1}^{0} 2^x\, dx + \int_{0}^{2} 2^x\, dx.$$

Si verifica facilmente che

$$\int 2^x\, dx = \frac{2^x}{\log 2} + c$$

e così l'integrale da calcolare diventa

$$\int_{-1}^{2} f(x) = -\frac{1}{\log 2}\left[2^x\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{\log 2}\left[2^x\right]_{0}^{2} = \frac{5}{2\log 2}.$$

— ◇ —

19. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \arcsin x\, dx.$$

R. Cominciamo integrando per parti:

$$\int_0^1 \arcsin x\, dx = [x \arcsin x]_0^1 - \int_0^1 x\, d(\arcsin x) == \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Ora calcoliamo a parte l'integrale che manca

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, d\left(x^2\right).$$

Quindi "aggiustiamo" il differenziale in modo che diventi uguale a $1-x^2$:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, d(1-x^2) = -\frac{1}{2}\left[2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = 1.$$

Dunque

$$\int_0^1 \arcsin x\, dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

— ◇ —

20. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{16} \frac{1}{x+3\sqrt{x}+2}\, dx.$$

R. Qui conviene fare la sostituzione $t=\sqrt{x}$ così $t^2=x$, $2t\,dt=dx$. Trasformando anche l'intervallo di integrazione otteniamo

$$\int_0^{16} \frac{1}{x+3\sqrt{x}+2}\, dx = \int_0^4 \frac{2t}{t^2+3t+2}\, dt.$$

Ora integriamo la funzione razionale: la decomposizione in questo caso è

$$\frac{2t}{t^2+3t+2} = \frac{2t}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}$$

dove A e B sono costanti da determinare. Svolgendo i calcoli

$$\frac{2t}{t^2+3t+2} = \frac{(A+B)t+(2A+B)}{t^2+3t+2}$$

e si ricava facilmente che $A=-2$ e $B=4$. Quindi

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{2t}{t^2+3t+2}\, dt &= \int_0^4 \left(-\frac{2}{t+1} + \frac{4}{t+2}\right) dt \\ &= 2\left[\log\frac{(t+2)^2}{|t+1|}\right]_0^4 = 2\log\frac{36}{5} - 2\log 4 = 2\log\frac{9}{5}.\end{aligned}$$

— ◇ —

21. Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1/4}^{1/4} \frac{2\pi|x|}{(\cos(\pi x))^2}\,dx.$$

R. Dopo aver osservato che la funzione da integrare è pari e l'intervallo è simmetrico rispetto a 0, integriamo per parti

$$\begin{aligned}\int_{-1/4}^{1/4} \frac{2\pi|x|}{(\cos(\pi x))^2}\,dx &= 4\pi\int_0^{1/4} \frac{x}{(\cos(\pi x))^2}\,dx = 4\int_0^{1/4} x\,d\left(\tan(\pi x)\right)\\ &= 4\left[x\tan(\pi x)\right]_0^{1/4} - 4\int_0^{1/4}\tan(\pi x)\,dx\\ &= 1 - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\tan x\,dx.\end{aligned}$$

Per quanto visto

$$\int \tan x\,dx = -\log|\cos x| + c$$

e quindi

$$\int_0^{\pi/4}\tan x\,dx = \left[-\log|\cos x|\right]_0^{\pi/4} = \frac{\log 2}{2}.$$

Quindi l'integrale richiesto vale

$$\int_{-1/4}^{1/4} \frac{2\pi|x|}{(\cos(\pi x))^2}\,dx = 1 - \frac{2\log 2}{\pi}.$$

— ◇ —

22. Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(3x)\,\cos(4x)\,dx.$$

R. Operiamo utilizzando il metodo dell'integrazione per parti

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(3x)\,\cos(4x)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\cos(3x)\,d\left(\frac{\sin(4x)}{4}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left[\cos(3x)\,\sin(4x)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(4x)\,d\left(\cos(3x)\right)\\ &= \frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(3x)\,\sin(4x)\,dx.\end{aligned}$$

In modo simile

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x)\,\sin(4x)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x)\ d\left(-\frac{\cos(4x)}{4}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\left[\sin(3x)\,\cos(4x)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(4x)\,d\,(\sin(3x))\\ &= \frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\,\cos(4x)\,dx.\end{aligned}$$

Allora

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\,\cos(4x)\,dx = \frac{9}{16}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\,\cos(4x)\,dx$$

ossia l'integrale da determinare vale 0.

— ◇ —

23. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^e \min(x, 1/x)\log x\,dx.$$

R. Siccome per $x \in (0, e]$

$$\min(x, 1/x) = \begin{cases} x & \text{se} x \in (0, 1] \\ 1/x & \text{se } x \in (1, e] \end{cases}$$

l'integrale diventa

$$\int_0^e \min(x, 1/x)\log x\,dx = \int_0^1 x\log x\,dx + \int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx.$$

Per il primo integrale si ha che

$$\int_0^1 x\log x\,dx = \int_0^1 \log x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx = \left[-\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}.$$

Mentre per il secondo

$$\int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx = \int_1^e \log x\,d(\log x) = \left[\frac{(\log x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{1}{2}.$$

Quindi l'integrale richiesto vale $-1/4 + 1/2 = 1/4$.

— ◇ —

24. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{e^4} \max(\log x, \log(1/x))\, dx.$$

R. Prima osserviamo che $\log(1/x) = -\log x$. Quindi, dato che per $x \in (0, e^4]$

$$\max(\log x, -\log x) = \begin{cases} -\log x & \text{se } x \in (0,1] \\ \log x & \text{se } x \in (1, e^4] \end{cases}.$$

L'integrale diventa

$$\int_0^{e^4} \max(\log x, \log(1/x))\, dx = -\int_0^1 \log x\, dx + \int_1^{e^4} \log x\, dx$$

Per il primo integrale si ha che

$$-\int_0^1 \log x\, dx = [x \log x - x]_1^0 = 1.$$

Mentre per il secondo

$$\int_1^{e^4} \log x\, dx = [x \log x - x]_1^{e^4} = 3e^4 + 1.$$

Quindi l'integrale richiesto vale $2 + 3e^4$.

— ⋄ —

25. Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^6 \min(3 - |x-3|, 2)\, dx.$$

R. Notiamo che $3 - |x-3| \geq 2$ se e solo se $|x-3| \leq 1$ ossia per $x \in [2,4]$.
Quindi

$$\min(3 - |x-3|, 2) = \begin{cases} 3 - |x-3| & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [2,4] \\ 2 & \text{se } x \in [2,4] \end{cases}.$$

L'integrale allora si svolge nel seguente modo

$$\begin{aligned} \int_1^6 \min(3 - |x-3|, 2)\, dx &= \int_1^2 (3 - |x-3|)\, dx + \int_2^4 2\, dx + \int_4^6 (3 - |x-3|)\, dx \\ &= \int_1^2 (3 - (3-x))\, dx + 4 + \int_4^6 (3 - (x-3))\, dx \\ &= \int_1^2 x\, dx + 4 + \int_4^6 (6-x)\, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 4 + 12 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_4^6 = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

— ◇ —

26. Calcolare il limite
$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^4}\int_0^{t^2} \arcsin(3x)\,dx.$$

R. Si tratta del limite di un rapporto di infinitesimi. Procediamo applicando il teorema di de l'Hôpital. Per calcolare la derivata del numeratore utilizziamo il teorema fondamentale del calcolo integrale: se $F(x)$ è una primitiva della funzione $\arcsin(3x)$ allora $F'(x) = \arcsin(3x)$.
Dunque la derivata del numeratore è

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^{t^2} \arcsin(3x)\,dx\right) = \frac{d}{dt}\big(F(t^2) - F(0)\big) = F'(t^2)(t^2)' = 2t\,\arcsin(3t^2)$$

mentre la derivata del denominatore è $(t^4)' = 4t^3$.
Dato che $\arcsin t \sim t$ per t che tende a 0, abbiamo che

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^4}\int_0^{t^2} \arcsin x\,dx \overset{\text{H}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{2t\,\arcsin(3t^2)}{4t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{6t^3}{4t^3} = \frac{3}{2}.$$

— ◇ —

27. Calcolare il limite
$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^3}\int_t^{t^2} \sin^2(2x)\,dx.$$

R. Applichiamo il teorema di de l'Hôpital. Se $F(x)$ è una primitiva della funzione $\sin^2(2x)$ allora la derivata del numeratore è

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\int_t^{t^2} \sin^2(2x)\,dx\right) &= \frac{d}{dt}\big(F(t^2) - F(t)\big) = \sin^2(2t^2)\,(t^2)' - \sin^2(2t)\,(t)' \\ &= 2t\,\sin^2(2t^2) - \sin^2(2t).\end{aligned}$$

mentre quella del denominatore è $(t^3)' = 3t^2$.
Dato che $\sin t \sim t$ per t che tende a 0, abbiamo che

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^3}\int_t^{t^2} \sin^2(2x)\,dx \overset{\text{H}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{2t\,\sin^2(2t^2) - \sin^2(2t)}{3t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{8t^5 - 4t^2}{3t^2} = -\frac{4}{3}.$$

— ◇ —

28. Calcolare il limite
$$\lim_{t\to +\infty} \frac{t}{e^t}\int_{2e^t}^{5e^t} \frac{1}{\log x}\,dx.$$

R. Per applicare efficacemente il teorema di de l'Hôpital conviene risistemare i termini in modo da avere al numeratore solo l'integrale:

$$\lim_{t\to+\infty} \left(\int_{2e^t}^{5e^t} \frac{1}{\log x}\, dx \right) \Big/ \left(\frac{e^t}{t} \right).$$

La forma indeterminata è ∞/∞. Se $F(x)$ è una primitiva della funzione $1/\log x$ allora la derivata del numeratore è

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\int_{2e^t}^{5e^t} \frac{1}{\log x}\, dx \right) &= \frac{d}{dt}\big(F(5e^t) - F(2e^t)\big) = \frac{5e^t}{\log(5e^t)} - \frac{2e^t}{\log(2e^t)} \\ &= e^t \left(\frac{5}{t+\log 5} - \frac{2}{t+\log 2} \right) = e^t \cdot \frac{3t + 5\log 2 - 2\log 5}{(t+\log 5)(t+\log 2)} \sim \frac{3e^t}{t} \end{aligned}$$

mentre quella del denominatore è

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{e^t}{t}\right) = -\frac{e^t}{t^2} + \frac{e^t}{t} \sim \frac{e^t}{t}$$

. Quindi il limite richiesto è uguale a 3.

— ⋄ —

29. Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^\alpha} \int_{t^2}^{3t^2} \frac{e^{x^2} + e^{-x^2} - 2}{\sin(x^3)}\, dx.$$

R. Per x che tende a 0 la funzione

$$f(x) = \frac{e^{x^2} + e^{-x^2} - 2}{\sin(x^3)} \sim \frac{(1 + x^2 + x^4/2) + (1 - x^2 + x^4/2) - 2}{x^3} \sim x.$$

Quindi $f(x)$ è integrabile vicino a 0 e sia $F(x)$ una sua primitiva. Dato che il limite richiesto è un rapporto di infinitesimi possiamo applicare il teorema di de l'Hôpital. La derivata del numeratore è

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{t^2}^{3t^2} f(x)\, dx \right) = \frac{d}{dt}\big(F(3t^2) - F(t^2)\big) = f(3t^2)\,(3t^2)' - f(t^2)\,(t^2)' = f(3t^2)\,6t - f(t^2)\,2t.$$

mentre quella del denominatore è $(t^\alpha)' = \alpha t^{\alpha-1}$.
Dato che per t che tende a 0 $f(t) \sim t$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^\alpha} \int_{t^2}^{3t^2} \frac{e^{x^2} + e^{-x^2} - 2}{\sin(x^3)}\, dx \;&\overset{\text{H}}{=}\; \lim_{t\to 0^+} \frac{f(3t^2)\,6t - f(t^2)\,2t}{\alpha t^{\alpha-1}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{18t^3 - 2t^3}{\alpha t^{\alpha-1}} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{16}{\alpha} t^{4-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 < \alpha < 4 \\ 4 & \text{per } \alpha = 4 \\ +\infty & \text{per } \alpha > 4 \end{cases}. \end{aligned}$$

— ◇ —

30. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^1 \log x \, dx.$$

R. Come abbiamo già visto

$$\int \log x \, dx = x \, \log x - x + c.$$

Quindi

$$\int_0^1 \log x \, dx = [x \, \log x - x]_0^1 = -1 - \lim_{x \to 0^+} (x \, \log x - x) = -1$$

— ◇ —

31. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_1^2 \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}x)} \, dx.$$

R. La funzione data è continua e negativa sull'intervallo $(1, 2]$. Prima di provare a calcolare una primitiva verifichiamo se la funzione è integrabile sull'intervallo. Possiamo utilizzare il criterio del confronto asintotico perché la funzione ha segno costante nell'intervallo di integrazione. Per $x \to 1^+$

$$\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}x)} = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{\pi}{2})} = -\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}(x-1))} \sim -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{x-1}.$$

Quindi l'integrale diverge a $-\infty$ (il segno meno è dovuto al fatto che la funzione $1/\cos(\pi x/2)$ è negativa in un intorno di 1^+).

— ◇ —

32. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^3} \, dx.$$

R. Integriamo prima il fattore $1/x$

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^3} \, dx = \int_e^{+\infty} \frac{1}{(\log x)^3} \, d(\log x) = \left[-\frac{1}{2(\log x)^2} \right]_e^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

— ◇ —

33. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{(\sin x)^a}{x^3\,(x+5)^4}$$

è integrabile sull'intervallo $(0,2)$.

R. La funzione data è continua sull'intervallo $(0,2]$ e quindi dobbiamo fare un'analisi asintotica solo per $x \to 0^+$

$$\frac{(\sin x)^a}{x^3\,(x+5)^4} \sim \frac{x^a}{x^3\,5^4} \sim \frac{1}{5^4} \cdot \frac{1}{x^{3-a}}$$

Dunque la funzione è integrabile sull'intervallo $(0,2)$ se e solo se $\alpha = 3-a < 1$ ossia se $a > 2$.

— ◇ —

34. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{1-e^{-x}}{x^a\,|x-1|^{4a}}$$

è integrabile sull'intervallo $(0,+\infty)$.

R. Dato che il dominio della funzione da integrare è $(0,+\infty)\setminus\{1\}$, i punti da indagare sono tre: 0, 1 e $+\infty$.

Per $x \to 0^+$

$$\frac{1-e^{-x}}{x^a\,|x-1|^{4a}} \sim \frac{x}{x^a} = \frac{1}{x^{a-1}}$$

quindi, per l'integrabilità, $\alpha = a-1 < 1$ ossia $a < 2$.

Per $x \to 1$

$$\frac{1-e^{-x}}{x^a\,|x-1|^{4a}} \sim \left(1-\frac{1}{e}\right) \cdot \frac{1}{|x-1|^{4a}}$$

quindi, per l'integrabilità, $\alpha = 4a < 1$ ossia $a < \frac{1}{4}$.

Per $x \to +\infty$

$$\frac{1-e^{-x}}{x^a\,|x-1|^{4a}} \sim \frac{1}{x^a\,x^{4a}} \sim \frac{1}{x^{5a}}$$

quindi, per l'integrabilità, $\alpha = 5a > 1$ ossia $a > \frac{1}{5}$.

Unendo le tre condizioni abbiamo che $\frac{1}{5} < a < \frac{1}{4}$.

— ◇ —

35. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{1}{\sqrt{x}\,|\log(e^x-1)|^a}$$

è integrabile sull'intervallo $(0, +\infty)$.

R. Siccome il dominio della funzione da integrare è $(0, +\infty) \setminus \{\log 2\}$, dobbiamo fare l'analisi asintotica in 0, $\log 2$ e $+\infty$.
Per $x \to 0^+$ abbiamo

$$\frac{1}{\sqrt{x}\,|\log(e^x-1)|^a} \sim \frac{1}{x^{1/2}\,|\log x|^a}$$

quindi, dato che $\alpha = 1/2 < 1$, la condizione di l'integrabilità "vicino" a 0^+ è soddisfatta per qualunque a.
Per $x \to \log 2$ abbiamo che l'infinitesimo di riferimento è $(x - \log 2)$ e

$$\log(e^x-1) = \log(2e^{x-\log 2}-1) \sim \log(2(1+(x-\log 2))-1) = \log(1+2(x-\log 2)) \sim 2(x-\log 2).$$

Così

$$\frac{1}{\sqrt{x}\,|\log(e^x-1)|^a} \sim \frac{1}{\sqrt{\log 2}\,|2(x-\log 2)|^a} = \frac{1}{2^a\sqrt{\log 2}} \cdot \frac{1}{|x-\log 2|^a}$$

quindi la condizione di l'integrabilità "vicino" a $\log 2$ è soddisfatta per $\alpha = a < 1$.
Per $x \to +\infty$ abbiamo

$$\frac{1}{\sqrt{x}\,|\log(e^x-1)|^a} \sim \frac{1}{x^{1/2}\,x^a} = \frac{1}{x^{a+1/2}}$$

dunque la funzione è integrabile "verso" $+\infty$ se $\alpha = a + 1/2 > 1$ ossia se $a > 1/2$.
Quindi la condizione di integrabilità sull'intervallo $(0, +\infty)$ è: $1/2 < a < 1$.

— ◇ —

36. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{(x^2-1)^a}{\log x\,\sqrt{3-x}}$$

è integrabile sull'intervallo $(1, 3)$.

R. I punti da indagare sono due: 1 e 3.
Per $x \to 1^+$ abbiamo

$$\frac{(x^2-1)^a}{\log x\,\sqrt{3-x}} = \frac{((x-1)(x+1))^a}{\log(1+(x-1))\,\sqrt{3-x}} \sim \frac{2^a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(x-1)^a}{x-1} = \frac{2^a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(x-1)^{1-a}}$$

quindi, per l'integrabilità, $\alpha = 1 - a < 1$ ossia $a > 0$.
Per $x \to 3^-$ abbiamo

$$\frac{(x^2-1)^a}{\log x\,\sqrt{3-x}} \sim \frac{8^a}{\log 3} \cdot \frac{1}{(3-x)^{\frac{1}{2}}}$$

quindi è integrabile "vicino" a 3 perché $\frac{1}{2} < 1$.
Così l'unica condizione per l'integrabilità sull'intervallo $(1, 3)$ è: $a > 0$.

— ◇ —

37. Determinare per quali valori di $a > 0$ la funzione

$$\frac{\sqrt[4]{1+x^a}-1}{\log(3e^{x^2}+2)-\log 5}$$

è integrabile sull'intervallo $(0,+\infty)$.

R. I punti da indagare sono due: 0 e $+\infty$.
Per $x \to 0^+$ abbiamo

$$\frac{\sqrt[4]{1+x^a}-1}{\log(3e^{x^2}+2)-\log 5} = \frac{\sqrt[4]{1+x^a}-1}{\log(1+3(e^{x^2}-1)/5)} \sim \frac{x^a/4}{3(e^{x^2}-1)/5} \sim \frac{x^a/4}{3x^2/5} \sim \frac{5}{12}\cdot\frac{1}{x^{2-a}}$$

quindi, per l'integrabilità, $\alpha = 2-a < 1$ ossia $a > 1$.
Per $x \to +\infty$ abbiamo

$$\frac{\sqrt[4]{1+x^a}-1}{\log(3e^{x^2}+2)-\log 5} \sim \frac{x^{a/4}}{\log(3e^{x^2})} = \frac{x^{a/4}}{x^2+\log 3} \sim \frac{1}{x^{2-(a/4)}}$$

quindi è integrabile verso $+\infty$ se $\alpha = 2-(a/4) > 1$ ossia $a < 4$.
Così la condizione per l'integrabilità sull'intervallo $(0,+\infty)$ è: $1 < a < 4$.

— ◇ —

38. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{1-e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}\,|\log x|^a}$$

è integrabile sull'intervallo $(0,+\infty)$.

R. Il dominio della funzione da integrare è $(0,+\infty)\setminus\{1\}$ e dunque dobbiamo fare l'analisi asintotica in 0, 1 e $+\infty$.
Per $x \to 0^+$ abbiamo

$$\frac{1-e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}\,|\log x|^a} \sim \frac{1-e^{-1}}{x^{1/3}\,|\log x|^a}$$

quindi, dato che $\alpha = 1/3 < 1$, la condizione di l'integrabilità "vicino" a 0^+ è soddisfatta per qualunque a.
Per $x \to 1$ abbiamo che l'infinitesimo di riferimento è $(x-1)$ e

$$\frac{1-e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}\,|\log x|^a} = \frac{1-e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}\,|\log(1+(x-1))|^a} \sim \frac{1-e^{-1/2}}{|x-1|^a}$$

quindi la condizione di l'integrabilità "vicino" a 1 è soddisfatta per $\alpha = a < 1$.
Per $x \to +\infty$ l'esponente $-1/(1+x^2)$ è infinitesimo e dunque

$$e^{-1/(1+x^2)} \sim 1 + \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) \sim 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Allora
$$\frac{1-e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x}\,|\log x|^a} \sim \frac{1/x^2}{x^{1/3}\,|\log x|^a} = \frac{1}{x^{7/3}|\log x|^a}$$
e la funzione è integrabile "verso" $+\infty$ se $\alpha = 7/3 > 1$ ossia per qualunque a.
Quindi la condizione di integrabilità sull'intervallo $(0, +\infty)$ è: $a < 1$.

— ◇ —

39. Determinare per quali valori di $a > 0$ la funzione
$$\frac{\log(1+x^2) - (\log(1+x))^2}{x^a \cdot \sqrt{\sin x} \cdot (\pi - x)^{1/a}}$$
è integrabile sull'intervallo $(0, \pi)$.

R. Dobbiamo fare l'analisi asintotica in 0^+, π^-. Per $x \to 0^+$ abbiamo
$$\frac{\log(1+x^2) - (\log(1+x))^2}{x^a \cdot \sqrt{\sin x} \cdot (\pi - x)^{1/a}} \sim \frac{x^2 - x^4/2 + o(x^4) - (x - x^2/2 + o(x^2))^2}{x^a \cdot x^{1/2} \cdot \pi^{1/a}}$$
$$\sim \frac{x^3}{\pi^{1/a} x^{a+1/2}} = \frac{1}{\pi^{1/a}} \cdot \frac{1}{x^{a-5/2}}$$
quindi, la condizione di integrabilità $\alpha = a - 5/2 < 1$ è soddisfatta per $a < 7/2$.
Per $x \to \pi^-$ abbiamo che l'infinitesimo di riferimento è $(\pi - x)$ e
$$\frac{\log(1+x^2) - (\log(1+x))^2}{x^a \cdot \sqrt{\sin x} \cdot (\pi - x)^{1/a}} \sim \frac{\log(1+\pi^2) - (\log(1+\pi))^2}{\pi^a \cdot (\pi - x)^{1/2+1/a}}$$
quindi la condizione di integrabilità $\alpha = 1/2 + 1/a < 1$ è soddisfatta per $a > 2$.
Dunque la funzione data è integrabile sull'intervallo $(0, +\infty)$ se e solo se $2 < a < 7/2$.

— ◇ —

40. Calcolare l'integrale improprio
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\,(3 + (\log x)^2)}\,dx.$$

R. La funzione data è continua in $[1, +\infty)$ e se facciamo un'analisi asintotica per $x \to +\infty$ vediamo subito che la funzione data è integrabile:
$$\frac{1}{x\,(3 + (\log x)^2)} \sim \frac{1}{x\,(\log x)^2}.$$
Per calcolare l'integrale dobbiamo prima determinare una primitiva.
Per $x > 0$
$$\int \frac{1}{x\,(3 + (\log x)^2)}\,dx = \int \frac{1}{3 + (\log x)^2}\,d(\log x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\log x}{\sqrt{3}}\right) + c$$
Quindi
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\,(3 + (\log x)^2)}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arctan\left(\frac{\log x}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

— ⋄ —

41. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + (\sqrt{x})^3}\, dx.$$

R. La funzione data è continua e positiva in $(0, +\infty)$. Inoltre su questo intervallo è integrabile per il criterio del confronto asintotico:
per $x \to 0^+$

$$\frac{1}{\sqrt{x} + (\sqrt{x})^3} \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}},$$

per $x \to +\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{x} + (\sqrt{x})^3} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Per il calcolo del valore dell'integrale improprio determiniamo una primitiva: poniamo $t = \sqrt{x}$, così $t^2 = x$, $2t\, dt = dx$ e

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x} + (\sqrt{x})^3}\, dx &= \int \frac{2t}{t + t^3}\, dt = 2 \int \frac{1}{1 + t^2}\, dt \\ &= 2 \arctan(t) + c = 2 \arctan(\sqrt{x}) + c. \end{aligned}$$

Ora valutiamo la primitiva agli estremi di integrazione

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + (\sqrt{x})^3}\, dx = 2 \left[\arctan(\sqrt{x})\right]_0^{+\infty} = \pi.$$

— ⋄ —

42. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{(\log x)^3}{(x-1)^a \left(\log(1 + x^x)\right)^5}$$

è integrabile sull'intervallo $(1, +\infty)$.
R. La funzione data è continua e positiva in $(1, +\infty)$. e dunque i punti da esaminare sono 1^+ e $+\infty$. Per $x \to 1^+$

$$\frac{(\log x)^3}{(x-1)^a \left(\log(1 + x^x)\right)^5} \sim \frac{(x-1)^3}{(x-1)^a (\log 2)^5} = \frac{1}{(\log 2)^5} \cdot \frac{1}{(x-1)^{a-3}}$$

e quindi l'integrale converge "vicino" a 1^+ se $a - 3 < 1$ ossia se $a < 4$.
Per $x \to +\infty$

$$\frac{(\log x)^3}{(x-1)^a \left(\log(1 + x^x)\right)^5} \sim \frac{(\log x)^3}{x^a \left(\log(x^x)\right)^5} = \frac{1}{x^{a+5} (\log x)^2}$$

e quindi l'integrale converge "verso" $+\infty$ se $a + 5 \geq 1$ ossia se $a \geq -4$.
Così la condizione di integrabilità cercata è $a \in [-4, 4)$.

— ◇ —

43. Se

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

quanto vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2x}\,dx\,?$$

R. Dato che la funzione e^{-x^2} è pari

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Inoltre $-x^2+2x = -(x-1)^2+1$ e quindi ponendo $t = x-1$ otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+1}\,dt = e\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = e\sqrt{\pi}.$$

— ◇ —

44. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{1}{(x+8)(x-8)^a}$$

è integrabile sull'intervallo $(8,+\infty)$ e calcolare tale integrale per $a = 1/2$.

R. Dobbiamo fare l'analisi asintotica solo negli estremi dell'intervallo: 8 e $+\infty$.
Per $x \to 8^+$ abbiamo

$$\frac{1}{(x+8)(x-8)^a} \sim \frac{1}{16(x-8)^a}$$

quindi la condizione di l'integrabilità "vicino" a 8^+ è soddisfatta per $a < 1$.
Per $x \to +\infty$ abbiamo

$$\frac{1}{(x+8)(x-8)^a} \sim \frac{1}{x^{1+a}}$$

e la funzione è integrabile "verso" $+\infty$ se $\alpha = 1+a > 1$ ossia per $a > 0$.
Quindi la condizione di integrabilità sull'intervallo $(8,+\infty)$ è $0 < a < 1$.
Ora poniamo $a = 1/2$ e calcoliamo l'integrale facendo la sostituzione $t = \sqrt{x-8}$:

$$\int_8^{+\infty} \frac{1}{(x+8)\sqrt{x-8}}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{2}{(t^2+16)}\,dt = \frac{1}{2}\left[\arctan(t/4)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

— ◇ —

45. Per quali $a > 0$ il seguente limite è finito

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t^6} \int_t^{t^2} x^a (e^x + e^{-x} - 2)\, dx \ ?$$

R. Per $a > 0$ si tratta del limite di un rapporto di infinitesimi e possiamo provare ad applicare il teorema di de l'Hôpital.
Per calcolare la derivata del numeratore utilizziamo il teorema fondamentale del calcolo integrale: se $F(x)$ è una primitiva della funzione $x^a(e^x + e^{-x} - 2)$ allora $F'(x) = x^a(e^x + e^{-x} - 2)$.
Dunque, dato che $F'(x) \sim x^a \cdot x^2 = x^{a+2}$ per $x \to 0^+$,

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{F(t^2) - F(t)}{t^6} \overset{\text{H}}{=} \lim_{t \to 0^+} \frac{F'(t^2)2t - F'(t)}{6t^5} = \lim_{t \to 0^+} \frac{t^{2(a+2)}2t - t^{a+2}}{6t^5} = -\frac{1}{6} \lim_{t \to 0^+} t^{a-3}$$

e il limite risulta finito se e solo se $a \geq 3$.